SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VI.
ZAGREB
1955 – 56

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
JOVANOVIĆ PETAR, prof. VPŠ, Cetinje
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb

Glavni urednik:

KURELEC ALFRED, profesor VPŠ, Zagreb

Tehnički urednik:

ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

TISAK GRAFIČKOG ZAVODA HRVATSKE — ZAGREB

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

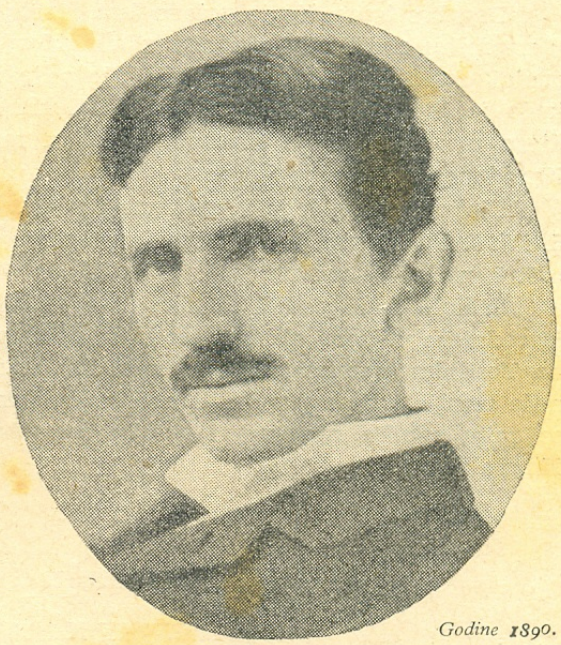
ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VI. BROJ 4 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1955. — 1956.

NIKOLA TESLA

Povodom stogodišnjice rođenja

U drugoj polovici prošlog stoljeća izumljeni su, primjenom Faradayjevog otkrića elektromagnetske indukcije (1831), prvi novi izvori električne energije, — najjednostavniji električni generatori (Gramme, 1869). U generatorima se stvarala električna struja s pomoću mehaničke energije, a ne više kao dotada pretvaranjem kemijske energije u električnu. Ubrzo se uvidjelo, da je tim izumom dobivena mogućnost ne samo novog snažnog izvora energije, nego i prenošenja energije na velike udaljenosti. Tu mogućnost trebalo je tehnički ostvariti. Najuspješnije, temeljito i u cijelosti riješio je taj problem, već osamdesetih godina prošlog stoljeća, naš Nikola Tesla. Otkrićem zakretnog (obrtnog) magnetskog polja, i izumom indukcionog elektromotora i višefaznih električnih struja, Tesla je prvi omogućio iskorištavanje goleme energije slapova Niagare i prenošenje te energije, putem električne struje, na velike daljine. Započela je nova epoha u industrijalizaciji i elektrifikaciji svijeta: izvanredno velike snage vodopada stavljene su u službu čovjeka i njegove privrede. Širom cijelog svijeta energija slapova tjerala je motore u industriji, a rasvijetlila gradove i naše domove. Stvorena je moderna svjetska industrija, a i njene posljedice: propadanje starih društvenih i državnih oblika i stvaranje novih. Taj društveni proces je u punom jeku još i danas: on se odvija pred očima sadašnjih generacija i u našoj zemlji i u mnogim drugim evropskim i izvanevropskim zemljama. Tom općem društvenom preporodu čitavog svijeta mnogo je pridonijelo i brzo obavještavanje putem radija. A u tom području bežičnog prijenosa položio je mnogi temelj i opet naš Tesla svojim radovima s visokofrekventnim strujama visoke napetosti.



Godine 1890.

Nikola Tesla rodio se 10. VII. 1856. u ličkom selu Smiljanu. Škole je polazio u Gospiću i Karlovcu, a tehniku u Gracu i Pragu. Nakon svršenih nauka boravio

je i radio kratko vrijeme po evropskim gradovima: u Budimpešti, gdje je već godine 1882. pronašao princip svog indukcionog motora, ali ga nije objavio, zatim u Parizu i Strassburgu. Godine 1884. prešao je u Ameriku k Edisonu. S njime se nije mogao složiti, pa je uz pomoć svojih prijatelja osnovao vlastiti laboratorij. Godine 1887. prijavio je patentnom uredu u Americi svoja najveća otkrića: zakretno magnetsko polje, indukcioni motor i višefazne struje. Konačno, godine 1896. primijenjen je Teslin sustav višefaznih struja, generatorâ i motorâ za proizvodnju, prenošenje i iskorištavanje električne energije na slapovima Niagare. Uspjeh, što ga je pokazao Teslin sustav u svojoj prvoj, ali grandioznoj primjeni, ubrzo je utro put Teslinom sistemu po čitavom svijetu.

Tesla je bio svestran izumitelj. Njegovi sjajni eksperimenti u području visokofrekventnih struja visoke napetosti, koje je s mnogo efekta demonstrirao na svojim predavanjima po gradovima Evrope i Amerike početkom devedesetih godina, pronijeli su mu također slavu širom cijelog kulturnog svijeta. A radio je i u drugim područjima, pa premda tu nije iznio velika otkrića, kao u prva dva područja, svaki njegov rad imao je pečat njegove pronicavosti, bujne mašte i originalnog izumiteljskog duha. U tom povučenom osobenjaku krile su se izvanredne karakterne osobine: izdržljivost, poštenje i nesebičnost, a povrh toga i patriotizam i borbenost za slobodu i napredak.

Usprkos tome, što je gotovo šest desetljeća proživio u Americi i svojim udjelom u napretku civilizacije pripada cijelom čovječanstvu, Tesla je uvijek ostao privržen svojoj domovini i svom narodu. Tako je i kao starac od osamdeset pet godina, kada je 1941. izvršena invazija fašističkih okupatora na našu zemlju, a narod se digao u obranu svoje slobode, Tesla sa mnogo simpatija i priznanja pratio našu Narodnooslobodilačku borbu.

Kako je povučeno i izolirano živio, tako je potpuno osamljen i umro između 5. i 7. I. 1943. Dana 5. I. strogo je zabranio da mu bilo tko ulazi u sobu bez poziva, a 7. I. nađen je mrtav.

Nikoli Tesli podići će današnje naše pokoljenje najljepši i trajan spomenik izgradnjom velikog elektroenergetskog sustava u našoj zemlji; taj sustav se osniva na Teslinim izumima. Golemi novi izvor energije podići će znatno privrednu moć naše zemlje i time pospješiti opći napredak naših naroda i naše domovine, za koji se svim svojim snagama i svojim izuzetnim sposobnostima zalagao i naš slavni Nikola Tesla*.

A. KURELEC

Nešto o izvođenju Heronovog obrasca

IGNJAT KARALIĆ, Novi Sad

Ako se ispituje upisani i spoljnoupisani krug trougla dolazi se do nekih važnih osobina koje nastaju iz takove relacije krugova i trougla.

Spoljno upisani krug je onaj koji dodiruje jednu stranu u trouglu i produženja druge dve strane. Znamo da takvih krugova u trouglu ima tri. Centar toga kruga nalazi se na preseku simetrale jednog unutrašnjeg ugla i simetrala spoljašnih uglova na ostala dva temena.

1 — Uzmimo da je O centar upisanog, a O_a centar spoljnoupisanog kruga, koji leži naspram temena A ugla BAC, sa poluprečnicima ρ i ρ_a.

Iz slike se vidi da oba kruga imaju zajedničku jednu unutrašnju i dve spoljašne tangente, a spoljnoupisani krug se naslanja na stranu $\overline{BC}$ trougla ABC.

---

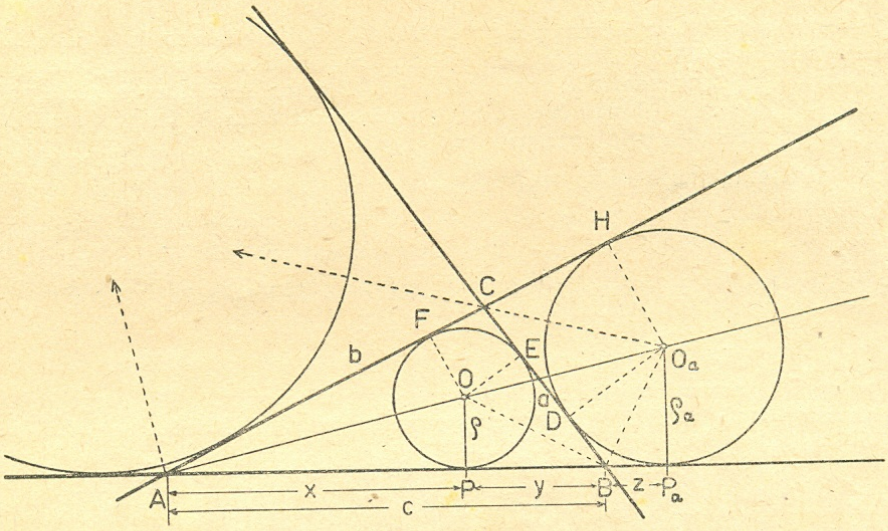
* Opširniji prikaz o djelu Nikole Tesle naći će naši čitaoci u 3. broju III. godišta Matem. fiz. lista, povodom desetgodišnjice Tesline smrti (1953) — *Uredništvo.*

Prema posledici o periferiskim uglovima u krugu znamo da su tangente povučene na kružnu liniju, iz neke tačke van nje, jednake i da grade jednake uglove s pravom koja spaja ovu tačku sa centrom kruga. Iz tih razloga je:

$$\overline{AP_a} = \overline{AH} \quad \text{i} \quad \overline{AP} = \overline{AF}$$

pa prema tome i

$$\overline{PP_a} = \overline{FH} \tag{1}$$



2 — Sada se može pokazati da svaka trouglova strana ima istu veličinu duži kao i otsečci na ostalim stranama između dodirnih tačaka oba kruga:

$$\overline{BC} = \overline{BD} + \overline{DC} \quad \text{ili} \quad \overline{BC} = \overline{BP_a} + \overline{CH}$$
$$\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{EC} \quad \text{ili} \quad \overline{BC} = \overline{PB} + \overline{FC}$$

Sabiranjem se dobija:

$$2\,\overline{BC} = \overline{PB} + \overline{BP_a} + \overline{FC} + \overline{CH}$$

ili

$$2\,\overline{BC} = \overline{PP_a} + \overline{FH}$$

pa je prema (1)

$$2\,\overline{BC} = 2\,\overline{PP_a} = 2\,\overline{FH}$$
$$\overline{BC} = \overline{PP_a} = \overline{FH} \tag{2}$$

3 — Nastavljenim razmatranjem jednakosti $\overline{PB} = \overline{BE}$ lako uviđamo zbog posljedice (2) da je i $\overline{BP_a} = \overline{CE}$

A kako postoji i jednakost $\overline{BP_a} = \overline{BD}$ onda je iz svojstva tranzitivnosti

$$\overline{BD} = \overline{CE} \tag{3}$$

Ako se sada levoj i desnoj strani ove jednakosti doda zajednički deo duži $\overline{DE}$ imaćemo:

$$\overline{BD} + \overline{DE} = \overline{CE} + \overline{ED}$$

t. j.

$$\overline{BE} = \overline{CD} \tag{4}$$

4 — Iz obrasca nakon sabiranja dolazimo do:

$$\overline{AP_a} = \overline{AB} + \overline{BP_a} = \overline{AB} + \overline{BD}$$
$$\overline{AH} = \overline{AC} + \overline{CH} = \overline{AC} + \overline{CD}$$
$$2\,\overline{AP_a} = 2\,\overline{AH} = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} \tag{5}$$

(jer je $\overline{BD} + \overline{CD} = \overline{BC}$), ili kako je to uobičajeno da se piše za obim trougla:

$$2s = a + b + c.$$

Sada razaznajemo da je:

$$s = \overline{AP_a} = \overline{AH} = x + y + z$$

Pošto je $AP_a = s$ i $\overline{PP_a} = \overline{BC} = a$

sledi:
$$x = \overline{AP} = \overline{AP_a} - \overline{PP_a} = s - a \tag{6}$$

Analogno je:
$$y = \overline{PB} = s - b$$
$$z = \overline{CF} = s - c.$$

5 — Ako sada još razgledamo trouglove OPB i O_aP_aB naći ćemo da su oni slični. Oba su pravougla, a ugao PBO jednak je uglu BO_aP_a kao uglovi sa normalnim kracima. Prave OB i O_aB su respektivno simetrale uglova ABC i CBP_a; one spajaju centre krugova pa su unutrašnje simetrale uglova što ih čine tangente povučene iz tačke B. Prema tome BO i BO_a su simetrale dva uporedna ugla i zatvaraju pravi ugao.

Na osnovi ovoga može se izvesti proporcija:

$$\rho : (s - b) = (s - c) : \rho_a$$

ili
$$\rho\,\rho_a = (s - b)\,(s - c) \tag{7}$$

Zatim iz sličnosti trouglova APO i AP_aO_a dolazimo do proporcije

$$\rho : (s - a) = \rho_a : s$$

ili
$$\rho s = \rho_a\,(s - a) \tag{8}$$

Ovo su sada poznati obrasci za izračunavanje površine trougla. Do ovoga dolazimo i ako od površine deltoida AHO_aP_a oduzmemo površinu petougla $BCHO_aP_a = 2\,BCO_a$. T. j.

$$P = \rho_a s - \rho_a a = \rho_a (s - a).$$

Ako je sad
$$P = \rho s$$

i
$$P = \rho_a\,(s - a)$$

onda je:
$$P^2 = \rho\,\rho_a\,s\,(s - a)$$

Zamenom prema (7) dobićemo Heronov obrazac

$$P^2 = s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)$$

ili
$$P = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)} \tag{9}$$

Zamenom na pr. u $P = \frac{ch_c}{2}$ lako dolazimo i do obrazaca za izračunavanje trouglovih visina

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)} \tag{10}$$

Poznato je da su Grci izvodili dokaze i rešavali računske operacije geometriskim konstrukcijama i da su tome daleko odmakli. Kasnije u doba kada su Arabljani prihvatali znanja grčke i indiske nauke oni su počinjali istim metodama. Tako su i ovaj čisto geometriski dokaz Heronovog obrasca objavili oko 820 godine tri brata Arabljana Mohamed, Ahmed i El Hasan iz istočne Arabije i bio je poznat pod imenom — Dokaz tri brata. — Smatra se da su oni, verovatno, koristili jedno grčko izvođenje ovog obrasca koje je još sam Heron dao.

Ovaj dokaz nije takao poznat a mogao bi se uspešno primenjivati nasuprot onome više veštačkom algebarskom izvođenju koje se izlaže u našim udžbenicima na osnovi Pitagorine teoreme.

6 — Na kraju bi se ovo razmatranje moglo popratiti još i pitanjima prema slici, kada bi se oba kruga dodirivala spolja;

a) kako će stajati unutrašnja tangenta na centralnoj razdaljini $\overline{OO_a}$ i gde će tada biti mesto tačke B;

b) odrediti vrstu trougla OBO_a i izračunati njegove strane i površinu ako je $\rho = 1$, a $\rho_a = 4$ merne jedinice.

Тежиште троугла

ВЛАДИМИР ПЕТРОВИЋ, Ниш

Чл. 1. При одређивању тежишта троугла можемо разликовати три, у основи различита случаја:

1) Троугао је хомогена материјална плоча,
2) Троугао чине три хомогене материјалне шипке и
3) Троугао чине само три материјалне тачке у његовим теменима.

Чл. 2. *Први случај*, када је троугао материјална хомогена плоча, обрађен је у свакој средњошколској планиметрији. Знамо да се у том случају све три тежишне линије троугла секу у истој тачки, тежишту троугла, која сваку од њих дели у размери 2 : 1, почев од темена троугла.

Чл. 3. Узмимо троугао ABC, чије су стране a, b и c. Повуцимо једну трансверзалу кроз теме A, која наспрамну страну сече у произвољној тачки D (сл. 1). Ставимо:

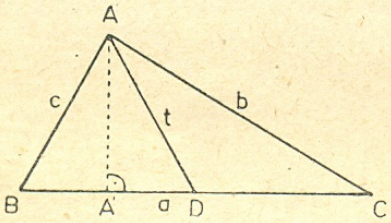
$$AD \equiv t,\ BD \equiv p,\ DC \equiv q \text{ и } DA' \equiv t'\ (AA' \perp BC)$$

Применом познате теореме на троугле ACD и BCD имамо да је

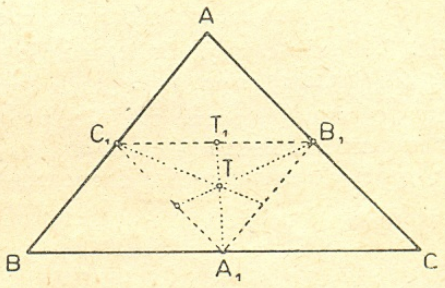
$$b^2 = t^2 + q^2 + 2qt' \qquad \text{и} \qquad c^2 = t^2 + p^2 - 2pt'$$

Ако прву једначину помножимо са p а другу са q, па их саберемо, имаћемо

$$b^2p + c^2q = t^2(p + q) + pq(p + q)$$



Сл. 1.



Сл. 2.

Како је $p + q = a$, то коначно имамо да је

$$b^2p + c^2q = t^2a + pqa \tag{1}$$

Ова једначина претставља Стјуартову (Stewart) релацију, која служи за израчунавање било којег елемента који у њој фигурише, а коју ћемо даље моћи често да користимо.

Чл. 4. Ако је у Стјуартовој релацији $p = q = \frac{a}{2}$, тада је t уствари тежишна линија троугла за страну a. Обележимо је са t_a. У том случају горња релација постаје, пошто је претходно скратимо са a

$$\frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} = t_a^2 + \frac{a^2}{4} \qquad \text{или} \qquad 4t_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2 \tag{2}$$

одакле је коначно

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} \tag{3}$$

Чл. 5. Ако напишемо једначине (2) за све три тежишне линије, па их саберемо, добићемо

$$4(t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2) \tag{4}$$

Дакле, четвороструки збир квадрата тежишних линија троугла једнак је тростроком збиру квадрата његових страна.

Обележимо отстојања тежишта до троуглових темена са τ_a, τ_b и τ_c ($\tau_a = \frac{2}{3} t_a$ итд.), тада је $t_a = \frac{3}{2}\tau_a$ итд. Ако ове вредности сменимо у (4), добијамо да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3(\tau_a^2 + \tau_b^2 + \tau_c^2) \qquad (5)$$

Дакле, збир квадрата троуглових страна једнак је троструком збиру квадрата отстојања тежишта од темена троугла.

Чл. 6. *Други случај.* Нека су стране троугла ABC хомогене материјалне шипке исте дебљине. Тежиште сваке ове шипке, као што знамо, биће на њиховим срединама у тачкама A_1, B_1 и C_1 (сл. 2). Одредити тежиште оваквог троугла своди се, дакле на одређивање тежишта система од три материјалне тачке — три масе — у тачкама A_1, B_1 и C_1, а које су пропорционалне одговарајућим странама троугла.

Тежиште за две масе у тачкама C_1 и B_1, односно за стране AB и AC, биће нека тачка T_1 на C_1B_1 таква да је, као што знамо из физике: $C_1T_1 : T_1B_1 = AC : AB$.

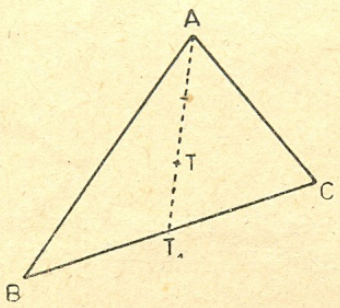
Но како је $A_1C_1 : A_1B_1 = \frac{AC}{2} : \frac{AB}{2} = AC : AB_1$ то је и $C_1T_1 : T_1B_1 = A_1C_1 : A_1B_1$.

Последња једнакост казује да је A_1T_1 симетрала унутрашњег угла A_1, троугла $A_1B_1C_1$.

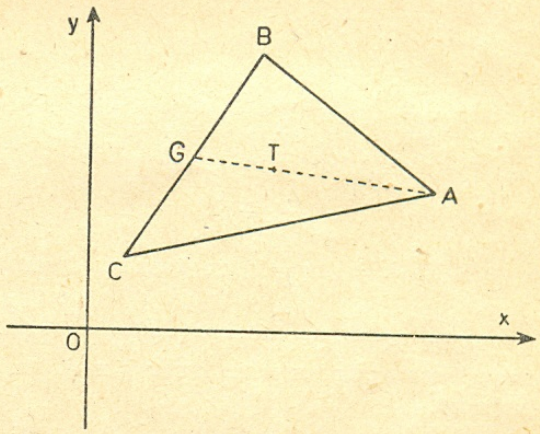
Тежиште за све три троуглове стране биће негде између T_1, тежишта за AB и AC и тачке A_1, тежишта за BC, дакле негде на симетрали A_1T_1. Истим расуђивањем закључујемо да тежиште целог троугла мора да буде и на симеталама остала два унутрашња угла B_1 и C_1 троугла $A_1B_1C_1$. Отуда закључак: Тежиште троугла кога чине три материјалне хомогене шипке, налази се у центру круга уписаног у троугао, чија су темена на срединама страна датог троугла.

Чл. 7. *Трећи случај.* Овде постоје две могућности: а) масе у теменима троугла су једнаке и в) масе су неједнаке.

Ако су масе једнаке, тада је, као што је познато, тежиште система од две једнаке масе у теменима B и C троугла



Сл. 3.



Сл. 4.

ABC (сл. 3) тачка T_1, која полови дуж BC. Тежиште система све три масе у A, B и C биће тачка T, која дуж AT_1 дели тако да је $AT = 2TT_1$, пошто је маса у T_1 једнака двострукој маси у A. Дакле, тежиште трију једнаких маса, које се налазе у теменима троугла, налази се у истој тачки где би било тежиште троугла да је он хомогена плоча (као у првом случају).

Чл. 8. Ако су масе у теменима троугла различите, тежиште таквог система можемо најлакше да одредимо аналитичком методом. Нека су троуглова темена $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ а масе у овим теменима респективно m_1, m_2 и m_3. Нека је, даље, $G(x_g, y_g)$ тежиште за масе m_2 и m_3 а $T(x_t, y_t)$ тежиште за све три масе (сл. 4).

Како је, према познатом правилу из физике $BG : GC = m_3 : m_2$ то је, према аналитичком обрасцу за одређивање координата тачке, која дату дуж (овде дуж BC) дели у датој размери (овде у размери $m_3 : m_2$); $x_g = \frac{m_2x_2 + m_3x_3}{m_2 + m_3}$ и $y_g = \frac{m_2y_2 + m_3y_3}{m_2 + m_3}$. Исто

тако је $GT : TA = m_1 : m_g$, па је $x_t = \frac{m_1 x_1 + m_g x_g}{m_1 + m_g}$ и $y_t = \frac{m_1 y_1 + m_g y_g}{m_1 + m_g}$. Како је $m_g = m_2 + m_3$, то сменом овога и вредности за x_g и y_g добијамо коначно за координате тежишта:

$$x_t = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \text{ и } y_t = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{6}$$

Из обрасца (6) видимо да за бесконачно много могућих комбинација за количине маса постављених у истим тачкама A, B и C, добијамо бесконачно много различитих тачака за тежиште тога система. Дакле, тежиште у овом случају није никаква стална (или тако звана „важна“) троуглова тачка. Но очигледно је да се тежиште увек налази у унутрашњости троугла, пошто мора да је између тачака A и G.

Ако је $m_1 = m_2 = m_3$, обрасци (6) добивају облик

$$x_t = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \qquad y_t = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \tag{7}$$

који нам аналитички одређују положај тежишта за случај под а) (чл. 7), као и за први случај (чл. 2).

Jedna teorema o pravouglim sličnim trouglovima i njena primjena

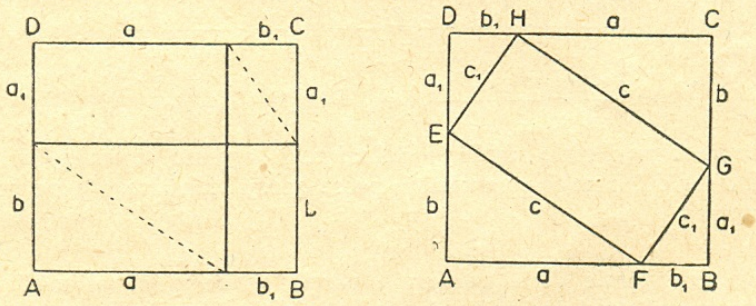
VOJISLAV STOJSAVLJEVIĆ, Banjaluka

Ako su pravougli trouglovi slični, onda je zbir produkata homolognih kateta jednak produktu hipotenuza.

Dokaz: Kod sličnih trouglova su homologne strane proporcionalne $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \frac{c_1}{c} = k$, odnosno $a_1 = ak$, $b_1 = bk$, $c_1 = ck$. Kako se radi o pravouglim trouglovima, važi Pitagorina teorema: $a^2 + b^2 = c^2$. Pomnožimo li ovu jednačinu s „k“, imamo: $a\,(ak) + b \cdot (b \cdot k) = c \cdot (ck)$ ili $aa_1 + bb_1 = cc_1$.

Geometrijski dokazi.

1) Nacrtamo dva jednaka pravougaonika $ABCD$ čije su dužine $a + b_1$, a širine $b + a_1$. Na njima su raspoređena dva para sličnih pravouglih trouglova kao na sl. 1. Oduzmemo li



Sl. 1.

od prvog pravougaonika dva para sličnih pravouglih trouglova, ostaju nam dva pravougaonika čija je površina $aa_1 + bb_1$.

Ako oduzmemo od drugog pravougaonika $ABCD$ slične pravougle trouglove ostaje nam pravougaonik $EFGH$ čija je površina cc_1.

Kad od jednakih površina oduzimamo jednake površine, moraju ostaci biti jednaki.

Dakle, $$aa_1 + bb_1 = cc_1.$$

2) Na slici br. 2 je nacrtan pravougaonik $ABCD$ na kom su raspoređena dva para sličnih pravouglih trouglova tako da hipotenuze većih trouglova čine dužinu, a hipotenuze manjih trouglova širinu pravougaonika $ABCD$. Duže katete omeđuju pravougaonik $EFGH$

koji leži unutar pravougaonika $ABCD$. $\begin{pmatrix}\Delta ADE \cong \Delta BCG\\ \Delta ABH \cong \Delta CDF\end{pmatrix}$. Površinu pravougaonika $ABCD$ izrazimo na dva načina.

Prvo, saberemo površine sličnih pravouglih trouglova i pravougaonika $EFGH$.

$$P = 2\cdot\frac{ab}{2} + 2\frac{a_1b_1}{2} + (a - b_1)\,(a_1 - b)$$

$$= ab + a_1b_1 + aa_1 - a_1b_1 - ab + bb_1$$

$$P = aa_1 + bb_1.$$

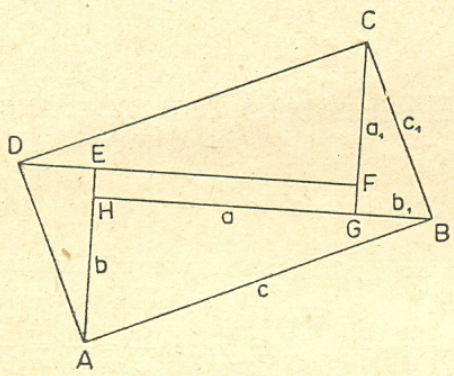
Iz slike se vidi da je $P = cc_1$. Izjednačenjem tih dviju vrijednosti za P, imamo

$$aa_1 + bb_1 = cc_1.$$

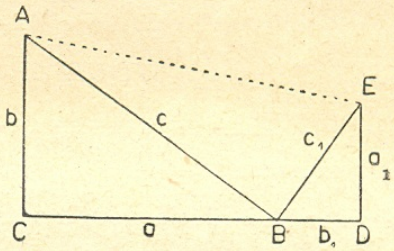
3) Na sl. 3 je nacrtan trapez $ACDE$ čije su osnovke b i a_1, a visina $a+b_1$, $\Delta ABC \sim \Delta BDE$. Njegovu površinu izrazimo isto na dva načina.

Saberemo li površine triju pravouglih trouglova koji čine trapez, izlazi

$$P = \frac{a\cdot b}{2} + \frac{a_1b_1}{2} + \frac{cc_1}{2} \qquad (1)$$



Sl. 2.



Sl. 3.

Po formuli za površinu trapeza biće:

$$P = \frac{(b + a_1)\,(a + b_1)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{a_1b_1}{2} + \frac{aa_1}{2} + \frac{bb_1}{2} \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\frac{ab}{2} + \frac{a_1b_1}{2} + \frac{cc_1}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{a_1b_1}{2} + \frac{aa_1}{2} + \frac{bb_1}{2},$$

$$\frac{cc_1}{2} = \frac{aa_1}{2} + \frac{bb_1}{2}, \quad cc_1 = aa_1 + bb_1.$$

(Ova tri dokaza su ustvari malo uopšteni dokazi za Pitagorinu teoremu, jer kad je konstanta sličnosti $k = 1$ trouglovi postaju podudarni, pa se gornji dokazi svode na poznate dokaze za Pitagorinu teoremu).

Primjene

a) Ako se transverzale dviju paralelnih pravih sijeku u jednoj tački, onda je produkt njihovih segmenata (od presječne tačke da svake paralelne prave), umanjen za produkt ortogonalnih projekcija tih segmenata na te paralelne prave, konstantan.

Dokaz: pravougli $\Delta AED \sim \Delta ABC$ (sl. 4)

Stoga je $AB\cdot AE - BC\cdot ED = AC\cdot AD.$

Slično $AB_1\cdot AE_1 - B_1C\cdot E_1D = AC\cdot AD$ i t. d.

Ova teorema potsjeća na teoremu o sekantama kruga koje polaze iz jedne tačke. Zato ćemo je dovesti u vezu s tom teoremom. Izračunaćemo za koju veličinu „x“ mora da se pomakne tačka D po AC pa da i ona kao tačka B, C, E leži na istoj kružnoj liniji

$$AB\cdot AE = AC\cdot AD + BC\cdot ED \qquad (1)$$

$$AB\cdot AE = AC\cdot AM \qquad (2)$$

$$AM = AD + x \qquad (3)$$

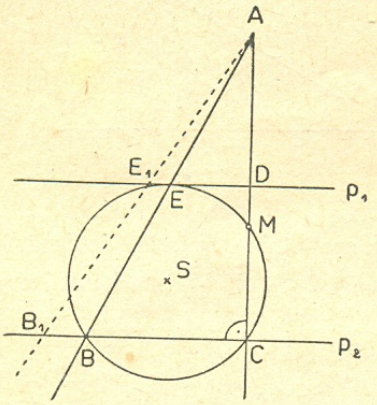
Iz (1) i (2) nastaje

$$AC \cdot AM = AC \cdot AD + BC \cdot ED,$$ a zamjenom

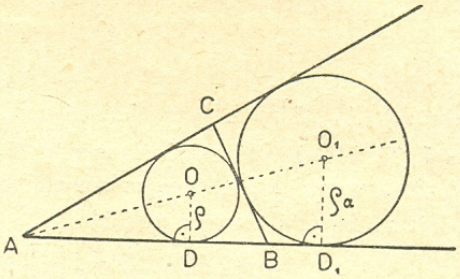
iz (3)
$$AC \cdot (AD + x) = AC \cdot AD + BC \cdot ED$$
$$AC \cdot AD + AC \cdot x = AC \cdot AD + BC \cdot ED$$
$$x = \frac{BC \cdot ED}{AC}.$$

Obilježimo li $BC = a$, $ED = a_1$, $AC = b$,

$$x = \frac{a \cdot a_1}{b}.$$



Sl. 4.



Sl. 5.

b) U svakom je trouglu proizvod udaljenosti centara upisanog i spoljašnjeg dodirnog kruga od vrha trougla jednak produktu strana trougla koje se sastaju u tom vrhu.

Dokaz: Iz sl. 5 se vidi da je s „O“ obilježen centar upisanog, a s „O_1“ centar spoljašnjeg dodirnog kruga. Ta dva centra leže na simetrali ugla α trougla ABC.

Znajući da su tangente povučene iz jedne iste točke na jedan isti krug međusobno jednake, lako se dokazuje da je $AD_1 = s$ (gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$) i da je $AD = s - a$.

Osim toga, poznato je da se površina trougla može izraziti ovako $P = \rho s$ i $P = \rho_a (s - a)$. Odatle imamo $\rho = \frac{P}{s}$ i $\rho_a = \frac{P}{s-a}$.

Pravougli $\triangle ADO \sim \triangle AD_1O_1$. Zbog toga $AO \cdot AO_1 = AD \cdot AD_1 + \rho\rho_a$. Stavimo li $AO = l_A$, $AO_1 = L_A$, pa izvršimo zamjenu u tu jednačinu, dobijemo

$$L_A l_A = (s - a)\, s + \frac{P}{s} \cdot \frac{P}{s-a}$$

$$L_A l_A = (s - a)\, s + \frac{P^2}{s\,(s-a)} \qquad (1)$$

Zamjenom Heronove formule $P^2 = s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)$ u jednačinu (1), ona postaje

$$L_A l_A = (s - a)\, s + \frac{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}$$

$$L_A l_A = (s - a)\, s + (s-b)\,(s-c)$$
$$L_A l_A = s^2 - as + s^2 - bs - cs + bc$$
$$L_A l_A = 2s^2 - (a + b + c)\, s + bc.$$

Međutim, $a + b + c = 2s$, pa je

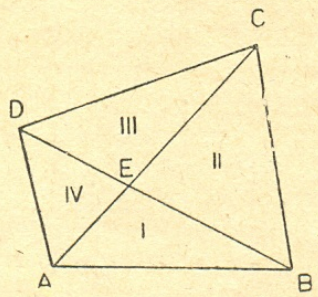
$$L_A l_A = bc$$

Cikličkom permutacijom dobijamo

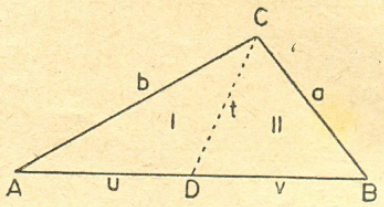
$$L_B l_B = ac$$
$$L_C l_C = ab$$

c) Povucimo u proizvoljnom četverouglu $ABCD$ dijagonale e i f. One dijele taj četverougao na četiri trougla. Obilježimo ih redom sa: I, II, III, IV.

Na svaki taj trougao primjenimo teoremu pod b) sl. br. 6.



Sl. 6.



Sl. 7.

Neka $L_E^{\mathrm{I}}, L_E^{\mathrm{II}}, L_E^{\mathrm{III}}, L_E^{\mathrm{IV}}$ znači udaljenosti centara spoljašnih (vanjskih) dodirnih krugova trouglova I, II, III, IV od zajedničkog vrha E, a neka $l_E^{\mathrm{I}}, l_E^{\mathrm{II}}, l_E^{\mathrm{III}}, l_{\mathrm{IV}}^{E}$ znači udaljenosti centara opisanih krugova u tim trouglovima od vrha E.

Tad je na osnovu teoreme pod b)

$$\left.\begin{aligned} AE \cdot BE &= L_E^{\mathrm{I}} l_E^{\mathrm{I}} \\ CE \cdot BE &= L_E^{\mathrm{II}} \cdot l_E^{\mathrm{II}} \\ DE \cdot CE &= L_E^{\mathrm{III}} \cdot l_E^{\mathrm{III}} \\ DE \cdot AE &= L_E^{\mathrm{IV}} l_E^{\mathrm{IV}} \end{aligned}\right\} + \qquad \begin{aligned} AE + CE &= e \\ BE + DE &= f \end{aligned}$$

$$(AE + CE) \cdot (BE + DE) = L_E^{\mathrm{I}} l_E^{\mathrm{I}} + L_E^{\mathrm{II}} l_E^{\mathrm{II}} + L_E^{\mathrm{III}} l_E^{\mathrm{III}} + L_E^{\mathrm{IV}} l_E^{\mathrm{IV}}$$

$$\boxed{e \cdot f = L_E^{\mathrm{I}} l_E^{\mathrm{I}} + L_E^{\mathrm{II}} l_E^{\mathrm{II}} + L_E^{\mathrm{III}} l_E^{\mathrm{III}} + L_E^{\mathrm{IV}} l_E^{\mathrm{IV}}}$$

Specijalno, u tetivnom četverouglu je na osnovu Ptolemejeve teoreme $ef = ac + bd$, pa će biti

$$ac + bd = L_E^{\mathrm{I}} l_E^{\mathrm{I}} + L_E^{\mathrm{II}} l_E^{\mathrm{II}} + L_E^{\mathrm{III}} l_E^{\mathrm{III}} + L_E^{\mathrm{IV}} l_E^{\mathrm{IV}}$$

d) Povucimo u trouglu ABC iz vrha C transverzalu „t“ (sl. 7). Ona dijeli taj trougao na dva trougla $ACD = \mathrm{I}$ i $BCD = \mathrm{II}$.

Primijenimo i na ta dva trougla teoremu pod b):

$$\left.\begin{aligned} L_C^{\mathrm{I}} l_C^{\mathrm{I}} &= bt \\ L_C^{\mathrm{II}} l_C^{\mathrm{II}} &= at \end{aligned}\right\} +$$

$$(a + b)\, t = L_c^{\mathrm{I}} l_c^{\mathrm{I}} + L_c^{\mathrm{II}} l_c^{\mathrm{II}}, \qquad t = \frac{L_c^{\mathrm{I}} l_c^{\mathrm{I}} + L_c^{\mathrm{II}} l_c^{\mathrm{II}}}{a + b}$$

Ako pomnožimo jednačine pod d), imamo

$$abt^2 = L_c^{\mathrm{I}} l_c^{\mathrm{I}} + L_c^{\mathrm{II}} l_c^{\mathrm{II}}$$

$$t^2 = \frac{L_c^{\mathrm{I}} l_c^{\mathrm{I}} + L_c^{\mathrm{II}} l_c^{\mathrm{II}}}{ab}$$

Međutim, $ab = L_c l_c$, pa je

$$\boxed{t^2 = \frac{(L_c^{\mathrm{I}} l_c^{\mathrm{I}}) \cdot (L_c^{\mathrm{II}} l_c^{\mathrm{II}})}{L_c l_c}} \qquad (1)$$

Uzmemo li u obzir Stewart-ovu teoremu (koja se lako dokazuje pomoću teoreme o kosinusu) $a^2u + b^2v = t^2c + uvc$ (gdje su u i v otsječci strane c)

$$\boxed{t^2 = \frac{a^2u + b^2v - uvc}{c}} \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi:

$$\frac{a^2u + b^2v - uvc}{c} = \frac{(L_c^{\mathrm{I}}\, l_c^{\mathrm{I}})(L_c^{\mathrm{II}}\, l_c^{\mathrm{II}})}{L_c\, l_c}$$

Ako su $u = v = \frac{c}{2}$, onda je t ustvari težišna linija, dobijemo relaciju:

$$\frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{(L_c^{\mathrm{I}}\, l_c^{\mathrm{I}})(L_c^{\mathrm{II}}\, l_c^{\mathrm{II}})}{L_c\, l_c}$$

Napomena: Ako povučemo u trouglu ABC više transverzala t_1, t_2, t_3 i t. d. može se dokazati da je

$$t_1^2 \cdot t_2^2 \cdot t_3^2 = \frac{(L_c^{\mathrm{I}}\, l_c^{\mathrm{I}})(L_c^{\mathrm{II}}\, l_c^{\mathrm{II}})(L_c^{\mathrm{III}}\, l_c^{\mathrm{III}})(L_c^{\mathrm{IV}}\, l_c^{\mathrm{IV}})}{L_c\, l_c}$$

Gde je greška

DRAGAN TRIFUNOVIĆ, Beograd

Greške u matematičkom rasuđivanju potiču iz raznih uzroka, iz pogrešne primene matematičke terminologije, iz netačnog tekstualnog objašnjenja pojedinih stavova, iz nevođenja računa o datim uslovima, zatim, greške potiču takođe, i prilikom vršenja izvesnih nemogućih operacija i najzad, prilikom donošenja zaključaka koji se oslanjaju na očiglednost. Isto tako, ima grešaka koje su proizašle iz nedovoljnog poznavanja stvari u vreme kada su izvesne matematičke radnje još bile nedovoljno poznate, a niz grešaka dolazi kao rezultat nemogućnosti da se nešto tačno proveri.

Mihajlo Petrović (1868—1943), međutim, ukazuje da »grešenje nije odlika samo slabih ili osrednjih intelektualnih radnika. Ono je gotovo neminovno i za najveće i za najpouzdanije specijaliste u pojedinim oblastima nauke«. Istorija nauke pruža mnoge, često neverovatne dokaze. Naprimer, Leibniz i Bernoulli imali su duge prepirke o pitanju da li negativni brojevi imaju svoje logaritme.[1] Kako je

$$(-a)^{2k} = (+a)^{2k}$$

zaključivalo se da je

$$2k\, ln\,(-a) = 2k\, ln\,(+a)$$

odnosno

$$ln\,(-a) = ln\,(+a)$$

Dakle, brojevi $-a$ i $+a$ imaju isti logaritam (!).

Dalje, Lagrange je dokazivao da je svaki ceo broj M jednak razlici kvadrata dva cela broja, što nije tačno kad je M dvostruki prost broj različit od četiri.

Neverovatno je kako je Fermat tvrdio da su stepeni broja 2 uvećani za 1

$$2^n + 1 \tag{1}$$

uvek prosti brojevi, što nisu, jer je naprimer, Euler našao da je izraz (1) za $n = 32$

[1] V. Bandić, I. — Pogrešno zaključivanje u matematici. Mat. fiz. list, god. I, br. 1-2, Zagreb, 1950-51. str. 7

deljiv sa 641. Fermat-ova greška u zaključivanju proizlazi iz nemogućnosti da dokaže svoju postavku.

Napomenimo da se ovakvi anahronizmi i omaške iz neznanja ili nepažnje javljaju i u drugim oblastima nauka a i u umetnosti. Tako naprimer, u »Hamletu« Šekspir govori o pucanju topova mada u vreme danskog kraljevića nije još bilo ni traga od baruta. Ili, Danijel Defo u »Robinson Kruseu« priča kako se Robinson jednom prilikom susreo sa jatom pingvina. Poznato je, međutim, da na tropskom ostrvu Huana Fernandeza nikada nije moglo biti pingvina (primeri uzeti po Mih. Petroviću).

Iznalaženje učinjenih grešaka često zahteva dublje poznavanje materijala o kome je reč. Zato se takve polemike i zadaci smatraju važnim za matematičko obrazovanje. »Zablude, greške i mane velikih ljudi u naukama mnogo su poučnije nego ispravna dela malih«, pisao je nemački filozof Ludvig Ber (1786—1837).

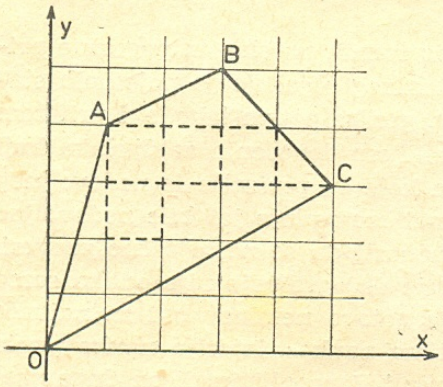
Ovde ćemo pokazati dva primera netačnog zaključivanja. Čitaocu se prepušta da pokaže gde se potkrala greška ako je uopšte ima u algoritmu.

1⁰ Iznesimo »mogućnost« zaključka: CELINA JE JEDNAKA JEDNOM SVOM DELU[2].

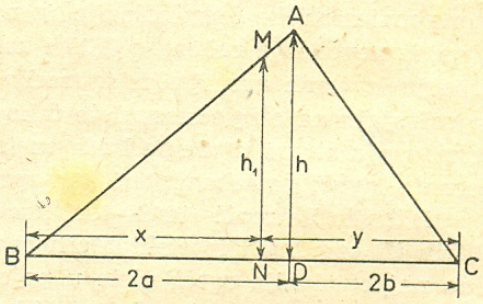
Iz poznate relacije površine trougla

$$S = {}^1/_2 [x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$$

pri čemu su x_i i y_i $(i = 1, 2, 3)$ koordinate temena trougla, sledi zaključak da je površina (P) četvorougla $OABC$ (sl. 1) jednaka površinama S_1 i S_2 trouglova nastalim povlačenjem dijagonale kroz koordinatni početak.



Sl. 1.



Sl. 2.

Ako je četvorougao obrazovan tačkama

$$O\,(0,0), \quad A\,(1,4), \quad B\,(3,5), \quad C\,(5,3)$$

biće:

$$P = {}^1/_2 [0\,(4-5) + 1\,(5-0) + 3\,(0-4) + 0\,(3-5) + 5\,(5-0) + 3\,(0-3)]$$

ili

$$P = {}^1/_2\,(5 - 12 + 25 - 9) = 4\,{}^1/_2$$

Odavde proizlazi, sadržina površine četvorougla je velika isto toliko kao $4\,{}^1/_2$ ucrtanih šrafiranih kvadrata (!).

2⁰ Pokažimo »mogućnost« egzistencije jednakosti:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2\,(a+b)}$$

---

[2]) Primer je, u nešto izmenjenom obliku, prvi put objavljen u delu Busekist-a, Berlin.

Trougao ABC (sl. 2) ima otsečke $2a$ i $2b$ načinjene visinom h. Ako se kroz tačku M $(M = AB)$ postavi duž h_1, tako da je $h_1 \| h$ i $P_{MBN} = P_{MNCA}$ tj. paralela h_1 deli trougao ABC na dva dela jednaka po površini (!), tada iz sličnosti trouglova a preko relacija

$$2x\,h_1 = 2(a+b)\,h$$

i

$$h_1 : h = x : 2a$$

sledi zaključak

$$x^2 = 2a(a+b) \qquad (*)$$

Ako se još na izrazu (*) izvrše naznačene transformacije dolazi se do oblika za otsečak kod temena B:

$$x = \sqrt{2a(a+b)}$$

Kako je tačka B ravnopravna sa temenom C za otsečak y imamo sledeći oblik:

$$y = \sqrt{2b(a+b)}$$

Pošto je

$$x + y = 2a + 2b$$

dobija se

$$\sqrt{2a(a+b)} + \sqrt{2b(a+b)} = 2(a+b)$$

ili

$$\sqrt{2(a+b)}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = 2(a+b) \qquad (**)$$

Ako se relacija (**) podeli sa $\sqrt{2(a+b)}$, pri čemu je $a+b \neq 0$ dobija se krajnji zaključak[3]

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{2(a+b)}$$

IZ MOJE RADIONICE I LABORATORIJA

Talasna mašina za progresivne i stojeće talase

OSKAR REDI, Zrenjanin

Ponekad nailazimo u matematici i fizici na teže zadatke. Onda moramo da uložimo mnogo truda da dođemo do rezultata. Ali, koliko je zadovoljstvo kad smo uspeli! To zadovoljstvo nam je najveća nagrada za naše zalaganje.

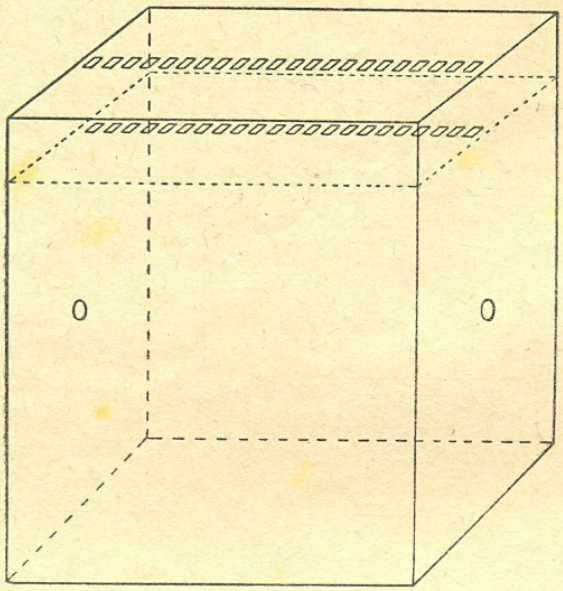
Takav teži zadatak za mlade majstore je i ovaj: sagraditi mašinu koja će nam na očigledan način prikazati i progresivne i stojeće talase.

Najbolji materijal za izradu takve mašine je metal, ali kako je njegova obrada teška, moći ćemo sa dosta pažnje da uspemo iako se poslužimo drvetom, šperpločom ili lesonitom.

Najlakši deo za izradu nam je kutija, dimenzija (unutrašnja mera) $190 \times 170 \times 220$ *mm* sa duplim poklopcem, jedan na visini od 190 *mm*, drugi na 220 *mm*. U oba poklopca izbušimo paralelno sa ivicom od 190 *mm*, na sredini, 37 rupica u obliku kvadrata 3×3 *mm* s tim što su razmaci između rupica po 2 *mm* a na krajevima ostaju neizbušeni delovi po 3,5 *mm*. U bočnim stranama kutije (170×220) na sredini izbušimo na visini od 85 *mm* od dna po jednu okruglu rupicu prečnika 5 *mm*. (Slika 1.).

[3]) Preporučujem učenicima srednjih škola da ustanove svesku gde će beležiti sve matematičke greške koje proizlaze iz navedenih razloga. Ima dosta primera lažnih zaključaka (specijalno kod ekvivalentnih jednačina); treba ih sve registrovati i dobro proučiti jer oni u velikoj meri utiču na matematičko obrazovanje.

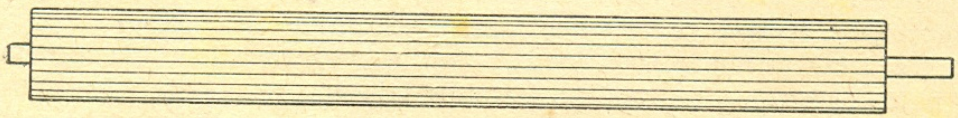
Drugi sastavni deo je osovina ukupne dužine 205 *mm*. U srednjem delu, dužine 185 *mm* njen je prečnik 20 *mm*, a u krajnjim delovima od 5 odn. 15 *mm* dužine, prečnik je 5 *mm*. Srednji deo je celom dužinom izžlebljen paralelnim žlebovima širine 2 *mm* i dubine oko 3 *mm*. Žlebova ima 12 i svaki sledeći je zakrenut za 30°. (Slika 2. i 3.) — Uz osovinu treba napraviti i ručicu za njeno okretanje koja će se naglaviti na duži tanki kraj osovine. Poseban opis za ručicu nije potreban.



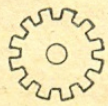
Sl. 1.

Sl. 4.

Dalje treba izraditi 37 pokazivača u obliku šipki za koje su na gornjem kraju učvršćene jednake loptice (mogu da budu i pločice), dok su donji krajevi račvasti radi učvršćivanja točkića. Šipke neka su dužine 125 *mm* mereno od centra loptice (pločice) do osovine točkića a debljine 3 × 3 *mm*. Loptice ili pločice neka su prečnika 4,5 *mm*. Donji račvasti deo šipke može da bude nešto širi, no ne preko 4 mm. Točkić od lima debljine 1 mm neka ima prečnik 10 do 20 *mm*. Prilikom izrade pokazivača treba naročito voditi računa, da su tačno iste dužine. (Slika 4.).



Sl. 2.

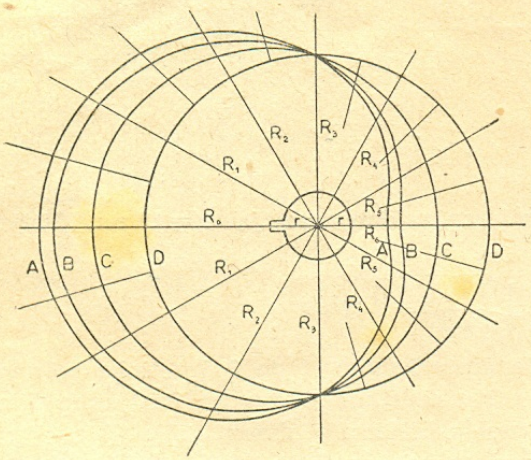


Sl. 3.

Najvažniji deo su ekscentri. Izradićemo ih u vidu okruglih ploča (prema slici 5 i tablici) debljine 5 *mm*. Najvećih »*A*« napravićemo 37 komada, srednjih »*B*« 12 komada, malih »*C*« 12 komada i kružnih »*D*« 7 komada. Uglovi između radiusvektora R_0, R_1 R_2 R_3, ... iznose po 30°. U centru je isečen krug prečnika $2r = 20$ *mm* sa jednim usekom u pravcu R_0 širine 2 *mm* i dubine oko 3 *mm*.

Sklapanje ide ovim redom: skinemo kuglice sa pokazivača i uvučemo ove s unutrašnje strane prema spolja u odgovarajuće rupice na poklopcima kutije. Onda učvrstimo kuglice, okrenemo kutiju s poklopcem naniže tako da pokazivači zauzmu što niži položaj i namestimo osovinu sa naglavljenim ekscentrima u odgovarajuća ležišta na bočnim stranama kutije koje sada zatvaramo. Vratimo kutiju

u normalni položaj i namestimo ručicu. Ako su pokazivači svojim točkićima nalegli na ekscentre, loptice već pokazuju oblik talasa, a okretanjem ručice napred ili nazad dobijemo željeni talas.



Sl. 5.

	A	B	C	D	
R_0	80	76	65	50	milimetara
R_1	76	72	63	50	
R_2	65	63	57	50	
R_3	50	50	50	50	
R_4	35	37	43	50	
R_5	24	28	37	50	
R_6	20	24	35	50	

Da li će izaći progresivni ili stojeći talas zavisi od toga kako smo naređali ekscentre na osovinu. Za progresivni talas potrebno nam je svih 37 ekscentara »*A*« koje nižemo na osovinu tako da je svaki naredni zakrenut prema prethodnom za 30°. Učvršćujemo ih malim pločicama 2 × 5 × 5 *mm* koje uglavljujemo u zasek ekscentra i odgovarajući žleb na osovini.

Za stojeći talas potrebno nam je 6 ekscentara »*A*« i svi ostali. Na osovinu ih redamo ovim redom: *DCBABCDCBABCD ..... CD*, no s tim da su prvih šest zaseka pomoću pločica učvršćeni na istom žlebu, sledeći 6 na dijametralno suprotnom žlebu (zakrenuti ekscentri za 180°) i tako naizmenično do kraja. — Na krajevima navučemo na osovinu uvek još po jednu pločicu debljine oko 2 *mm* da se ekscentri ne bi pomerali i da bismo smanjili trenje na bočnim stranama kutije.

Jednostavno mjerenje vremena reakcije

DRAGUTIN MAYER, Zagreb

Od časa, kad čovjek primi izvjesni podražaj (na pr. svjetlosni ili zvučni signal), pa do časa, kad na taj podražaj reagira svijesnom kretnjom (na pr. pokretom ruke), prođe neko određeno vrijeme, koje se u psihologiji zove *vrijeme reakcije*.

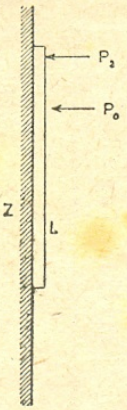
Prikazat ćemo ovdje jednu jednostavnu metodu, s pomoću koje možete odrediti koliko iznosi vrijeme reakcije vaše vlastito i vaših drugova. Za to mjerenje potrebna su dvojica. Jedan neka bude eksperimentator, a drugi opažanik.

Eksperimentator pritišče palcem desne ruke gornji kraj drvene letvice (dugačke oko 1 metar) na površinu glatkog zida *Z* (ili vrata), tako da letvica *L* stoji u vertikalnom položaju (vidi sliku).

Opažanik namješta palac svoje desne ruke oko 30 cm niže, sasvim blizu (1-2 mm) letvice, ali tako, da je se ne dotiče. Mjesto na letvici, pokraj kojega opažanik drži svoj palac, označimo crticom.

Nakon što su učinjene ove pripreme, eksperimentator, uz glasan poklik »sad« odmiče svoj palac od letvice, koja počinje slobodno padati. Međutim, opažanik

treba, u istom trenutku, kad začuje poklik eksperimentatora, pritisnuti svojim palcem letvicu na zid (vrata) i tako spriječiti njeno padanje. Pri tome će se palac opažanika naći na nekom drugom položaju letvice, koji također označimo crticom. Razmak između obiju crtica označava put s, koji je letvica prevalila za vrijeme padanja.



S pomoću formule za slobodni pad $s = \frac{g}{2} t^2$ izračunamo vrijeme reakcije

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

Na pr. kod jednog mjerenja dobiveno je $s = 11\ cm$. Vrijeme reakcije iznosi

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 11}{981}} = 0{,}15\ sek$$

Iako je vrijeme reakcije dosta kratko (1 do 2 desetinke sekunde), ono u nekim slučajevima igra važnu ulogu, na pr. kod upravljanja raznim brzim vozilima (automobil, željeznica, avion i sl.).

V j e ž b a : Izračunajte, koliko metara prevali avion, koji se giba brzinom od 250, 500, 750, 1000, 1250 ili 1500 km/sat, od časa, kad pilot uoči neku opasnost (na pr. zapreku na svom putu), pa do časa, kad njegove ruke počnu izvoditi propisane radnje na komandama stroja u svrhu, da se spriječi nesreća. Vrijeme reakcije pilota neka iznosi 0,15 sek. Tu moramo napomenuti, da je zbog tromosti mehanizma put aviona od časa, kad je uočena opasnost, pa do časa kad je avion reagirao na pilotove radnje, još znatno duži.

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Zanimljiv zadatak iz elektriciteta

Četiri galvanska članka svaki s napetosti E i unutarnjim otporom r spojena su u četverokut na način prikazan na slici. U jednoj dijagonali četverokuta nalazi se izvor istosmjerne ili izmjenične napetosti U s unutrašnjim otporom R, a na drugu dijagonalu priključena je neka potrošna sprava s otporom Z. Treba odrediti jakosti struje u svakom pojedinom vodu.

Po I. Kirchhoffovom zakonu imamo:

$$i_0 + i_1 = i_2$$
$$i_2 = i_3 + i$$
$$i_0 = i_3 + i_4.$$

Po II. Kirchhoffovom zakonu imamo:

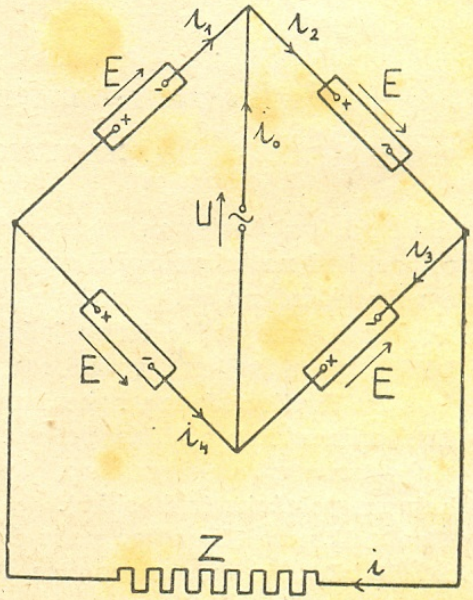
$$E - U - E = i_1 r - i_0 R - i_4 r$$
$$U + E - E = i_0 R + i_2 r + i_3 r$$
$$E + E = i_4 r - i_3 r + iZ.$$

Dobili smo 6 jednadžbi sa 6 nepoznanica

$$i,\ i_0,\ i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4.$$

Rješavanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$\boxed{i = \frac{2E}{r + Z}}, \qquad \boxed{i_0 = \frac{U}{R + r}}$$



$$i_1 = \frac{i}{2} - \frac{i_0}{2} \qquad i_3 = \frac{i_0}{2} - \frac{i}{2}$$

$$i_2 = \frac{i_0}{2} + \frac{i}{2} \qquad i_4 = \frac{i_0}{2} + \frac{i}{2}$$

Na osnovu ovih rezultata vidimo, da struja i, koja teče kroz potrošnu spravu Z, uopće ne ovisi o napetosti U, nego je proizvedena samim galvanskim člancima i neovisna je o tome, da li je napetost U priključena ili nije. Struja, koju proizvodi izmjenična napetost U, zatvara se kroz same galvanske članke i uopće ne teče kroz otpor Z jer o njemu niti ne ovisi, kao što se to vidi iz rješenja za i_0. Ta struja može samo škoditi galvanskim člancima, jer ih zagrijava i jer u njima vrši štetna kemijska djelovanja.

D. Mayer, Zagreb

Moć korekture brojeva

Kao član kućnog savjeta bio sam u komisiji za mjerenje površine stanova u zgradi, gdje stanujem. Ako je broj površine neke prostorije imao decimale, korigiran je na cijele prema posebnoj tablici. Opazio sam, da se brojevi oblika $n{,}5$, a tih je bilo najviše, korigiraju na n cijelih. Da su korigirani na $(n+1)$ cijelih, kako propisuje matematika, blagajne stambenih fondova u Zagrebu primale bi na mjesec koju stotinu tisuća dinara više. Trebalo je brojeve površina svih prostorija stana prije korekture zbrojiti, pa zbroj korigirati.

Trgovci korigiraju uvijek na više, jer kod obračuna u blagajni se ne smije pojaviti manjak, ali višak smije. Kod prometa od više stotina tisuća dinara na dan, taj višak može iznositi stotine tisuća dinara na mjesec.

Ostavio otac trojici sinova 17 koza, i to najstarijem $\frac{1}{2}$, srednjem $\frac{1}{3}$, a najmlađem $\frac{1}{9}$ broja koza. Sinovi su uvidjeli, da se oporuka ne da izvršiti, pa da koju kozu i zakolju, i otišli su kadiji, da ih savjetuje. Mudri kadija dao je dovesti jednu od svojih koza, i sad je koza bilo 18. Prvi sin je dobio 9 koza, drugi 6, a treći 2 koze; zajedno 17 koza. Kadiji je ostala njegova koza, ali da nije bio tako mudar, mogao se pouzdati u račun i korekturu: 17 koza : 2 = 8,5 koze, s korekturom 9 koza; 17 koza : 3 = 5,6... koze, s korekturom 6 koza; 17 koza : 9 = 1,8... koze, s korekturom 2 koze; (9+6+2) koze = 17 koza. Ključ priče:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}.$$

— Prošle jeseni vladina je stranka u Južnoj Koreji stavila prijedlog, da se član ustava o izboru predsjednika države proširi tako, da ista osoba može biti birana za predsjednika više puta za redom, a ne samo dva puta, kako određuje spomenuti član ustava. Da prijedlog prođe, potrebna je dvotrećinska većina; od 203 zastupnika glasalo ih je 135 za, a 68 protiv. Po shvaćanju opozicije prijedlog je odbijen, jer je $68 \cdot 2 = 136 > 135$. Ali je vladin govornik sutradan izjavio, da je prijedlog primljen, jer je ⅓ od 203 = 203 : 3 = 67,66..., s korekturom 68; protiv prijedloga glasalo je dakle $\frac{1}{3}$ zastupnika, i prema tome ⅔ za prijedlog.

S. Šk-a.

Zanimljivi kvadrati

a) $567^2 = 321\,489$; $854^2 = 729\,316$. U prvoj i u drugoj jednakosti dolaze sve znamenke osim nule, i to svaka samo jedamput.

b) $32\,043^2 = 1\,026\,753\,849$; $94\,695^2 = 8\,967\,143\,025$. U prvoj i u drugoj jednakosti dolaze na desnoj strani sve znamenke, i to svaka samo jedamput. Broj 32 043 je najmanji, a 94 695 najveći od 86 peteroznamenkastih brojeva, koji imaju tu istu osobinu.

S. Šk-a

Še nekaj o grafičnem reševanju kvadratne enačbe z konjugirano-kompleksnimi koreni

V št. I Letnika VI (1955-56) pokazano je grafično reševanje kvadratnih enačb z konjugirano-kompleksnimi koreni. Tu pokažimo še določitev teh kot presečišča kroga z premico.

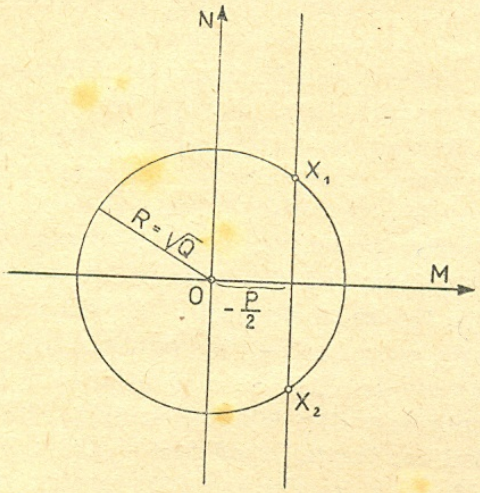
Če ima kvadratna enačba

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (1)$$

konjugirano-kompleksne korene, jih zapišemo

$$x_1 = m + in$$
$$x_2 = m - in$$

ta ležita v neki kompleksni ravnini. Vzemimo za realno os os m za imaginarno os pa os n. Tako tvorjen pravokotni koordinatni sistem določa našo kompleksno ravnino.



$$x_1 x_2 = m^2 + n^2 = q$$
$$m^2 + n^2 = q \qquad (2)$$

je enačba kroga v središčni legi z polmerom $\sqrt{q}$.

$$x_1 + x_2 = 2m = -p$$

$$m = -\frac{p}{2} \qquad (3)$$

je pa enačba premice vzporedne z imaginarno osjo v razdalji $-\frac{p}{2}$.

Preseki (2) in (3) so torej slike konjugirano-kompleksnih korenov x_1 in x_2.

Vprašanje je še ali preseki vedno eksistirajo! Če (3) vstavimo v (2) imamo

$$n = \pm\sqrt{q - \left(\frac{p}{2}\right)^2}$$

od tot dobivamo da preseki eksistirajo vselej kadar je

$$q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 > 0$$

oziroma

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0.$$

Torej vedno če so koreni enačbe (1) konjugirano-kompleksna števila. To nalogo smo si pa zastavili.

Ušan Janez, Vršac

Особености неких бројева

1) Има бројева који се могу претставити, на један или на више начина, као збир двају међусобно аксијално симетричних двоцифрених бројева. Тако, на пример, видимо да је:

$$99 = 18 + 81 = 27 + 72 = 36 + 63 = 45 + 54$$

Испитати, који се бројеви могу овако претставити и показати, како се могу наћи сабирци, који су у питању.

2) Приликом сабирања

$$286 + 173 = 459$$

видимо да сваки од сабирака, као и сам збир, претставља по један троцифрен број, и да се у току сабирања све цифре, почев од 1 па до 9, појављују по један пут. Можеш ли да наведеш све случајеве оваквог сабирања?

3) Приликом одузимања

$$954 - 459 = 495$$

видимо да су умањеник, умањитељ и остатак три троцифрена броја, изражена помоћу истих цифара, при чему су умањеник и умањитељ два аксијално симетрична броја. Може ли се навести још који случај оваквог одузимања?

4) Од једног вишецифреног броја треба одбити редом последњу, па две последње, па три последње и т. д. цифре, па све овако добијене бројеве треба сабрати. Нађени збир треба помножити са 9, а оно што се добије треба одузети од датог броја. Доказати да разлика, која се овако добије, мора увек претстављати збир цифара датог броја.

5) Замислимо некакав троцифрени број, формирајмо број који је с њиме аксијално симетричан и одузмимо мањи од та два броја од већег. Ако после тога саопштимо неком само једну од крајњих цифара нађене разлике, дотични ће моћи да нам саопшти целу нађену разлику. Како је то могуће?

Претпоставимо, даље, да замишљени број има на месту стотина и на месту јединица различите цифре. Тада, ако

нађемо поменуту разлику и број који је аксијално симетричан са том разликом, па ова два броја саберемо, добијамо увек 1089. Докажи то.

6) Видимо да је истовремено

$$2 + 5 + 27 = 1 + 15 + 18$$
$$2 \cdot 5 \cdot 27 = 1 \cdot 15 \cdot 18$$

Како би могао наћи још бројева, који испуњавају ове услове?

7) Наводимо два примера двоцифрених бројева, чији квадрати претстављају аксијално симетричне бројеве квадрата оних бројева, који су аксијално симетрични са самим датим бројевима.

$$12^2 = 144; \quad 21^2 = 441$$
$$13^2 = 169; \quad 31^2 = 961$$

Може ли се наћи још оваквих бројева?

8) Бројеви 24 и 76 допуњују се до 100. Ако саберемо њихове кубове, видимо да је нађени збир дељив са 100. Да ли је тешко наћи још бројева који имају ово својство?

9)Када претставља

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots n^2 = N$$

један квадрат?

За случај $n = 24$ биће

$$N = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{24 \cdot 25 \cdot 49}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4900 = 70^2$$

Може ли се навести још који овакав случај?

10) Неко је тврдио да бројеви 9 876 543 201 и 1 023 456 798 претстављају највећи и најмањи од десетоцифрених бројева, који су дељиви са 63 и имају то својство, да се у њима све цифре, почев од 0 па до 9, јављају по један пут. Да ли је то тачно?

П. Д.

Za naše najmlađe

A каже B-u: zamisli svoj kućni broj, pomnoži ga s 2, dobivenom broju dodaj 39 i cijeli zbroj pomnoži s 50. Dobivenom produktu dodaj 6 i od novog broja oduzmi godinu svog rođenja. Dobit ćeš broj, gdje ti posljednje 2 znamenke kazuju broj tvojih godina, a ostale tvoj kućni broj. Na čemu A zasniva svoju tvrdnju?

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike

204. Дат је ΔABC, чије су стране $BC=a$ $CA=b$, $AB=c$. Извести услов који треба да задовољавају a, b и c, ако се тежишне линије (медијане) повучене из B и C, секу под правим углом.

205. Решити једначину $\cos 8x = 1$, затим на тригонометриском кругу означити крајеве лукова који претстављају решења дате једначине. Нека су то тачке $A, B, C \ldots$ Израчунати дужине тетива AB, AC, AD итд. као и њихова растојања од центра круга.

206. Дати су полиноми:

$A = x^3 + x^2 - 9x - 9$, $B = (x-2)^2 - (x-4)^2$.

a) Формирати и упростити разломак

$$f(x) = \frac{A}{B}.$$

b) Испитати знак функције $f(x)$ за разне вредности x резултат проверити на графику функције $y = f(x)$.

c) Доказати: 1. ако је x паран број разломак $f(x)$ је несводљив; 2. ако је x непаран број дати разломак се своди на полином.

207.* Dvije kružnice sijeku se u točkama A i B; neka se točkom A povuče pravac s tako, da se tetiva AC prve kružnice odnosi prema tetivi AD druge kružnice kao 3 : 2 ili kao dvije po volji zadane dužine! Tetive AC i AD leže na sekanti s.

208. Zadan je pravi kut BAC, njegova simetrala s i dužina DE; na toj dužini zadana je točka F tako, da je $DF<FE$. Neka se dužina DE položi tako, da točka D padne na krak AC, točka E na krak AB, a točka F na simetralu s.

209.* Izračunaj:

$$\frac{(2a-3b)^2 - a^2}{4a^2 - (3b+a)^2} + \frac{4a^2 - (3b-a)^2}{9(a^2-b^2)} + \frac{(2a+3b)^2 - a^2}{9b^2 - a^2}.$$

210.* Neka se riješi i diskutira sistem:

$$(m^2+1)x + (m+1)y = m - 1$$
$$(m^2-1)x + (m-1)y = m + 1.$$

211. Neka se odrede stranice trokuta, ako poznamo simetralu kuta i težišnicu, koje izlaze iz vrha A, te je ujedno $2a = b + c$.

212. Ako je T točka polukružnice promjera $AB=2r$ središta O i ako se povuče polumjer OP paralelan s AT, neka se odredi položaj

točke T tako da $AT + TP$ bude jednako zadanoj veličini $m \cdot 2r$. Diskusija.

213. Neka se dokaže: ako razlomak

$$\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}$$

pretvorimo u decimalni razlomak, on je uvijek mješovito periodski.

(Sjeti se, da se kod pretvaranja razlomaka $\frac{a}{b}$, gdje su a i b rel. prosti, u decimalni razlomak, dobiva čist periodski razlomak, ako b ne sadrži prostih faktora 2 ni 5, a mješovito periodski, ako b pokraj drugih faktora sadrži i faktore 2 ili 5).

214. Neka se dokaže: ako 3 broja x, y, z, koja nemaju zajedničke mjere, zadovoljavaju relaciju $x^2 + y^2 = z^2$, da je
1) jedan od brojeva x i y mnogokratnik od 3,
2) jedan od brojeva x i y mnogokratnik od 4,
3) jedan od brojeva x, y i z mnogokratnik od 5.

215. Ako broj a nije djeljiv s 5, broj $a^4 - 1$ je sigurno djeljiv s 5.

B) Zadaci iz fizike

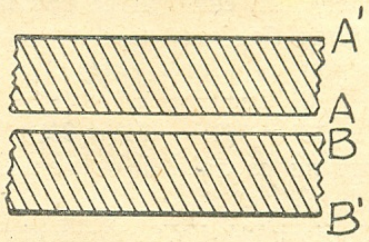
116.* Da bi jednostavno njihalo, duljine $l = 0{,}75\ m$ opisivalo plašt stošca, kojemu je kut pri vrhu $2\alpha = 60°$, — moramo mu dati brzinu u smjeru tangente na osnovku tog stošca. Kolika je ta brzina c?

117.* Koju bi duljinu trebala imati olovna žica, obješena na jednom svom kraju, da se zbog vlastite težine prekine? (Spec. tež. olova je $s = 11{,}4\ g^*/cm^3$, a čvrstoća istezanja mu je $k = 2\ kg^*/mm^2$).

118. Horizontalno drveno homogeno vreteno (gustoće $\rho = 0{,}9\ g/cm^3$, duljine $l = 100\ cm$, promjera $2r = 20\ cm$) može se vrtjeti oko svoje osi. Na njemu je učvršćeno tanko uže, koje je mnogo puta pravilno namotano oko vretena; na slobodnom kraju užeta obješeno je tijelo mase $m = 1570\ g$. Pita se: 1) kolikom akceleracijom giba se (vertikalno prema dolje) obješeno tijelo mase m; 2) kako duboko će tijelo stići nakon 10 sekundi jednoliko-ubrzanog gibanja prema dolje? (Moment tromosti (ustrajnosti) valjkastog vretena je $U = \frac{1}{2} m_v r^2$, gdje je m_v masa vretena. Trenje zanemarujemo).

119. Kuglasti balon, volumena $800\ m^3$ i ukupne težine (tvar balona, plin, gondola i teret) $Q = 1000\ kg^*$, uspinje se uvis. Pita se: 1) koliku najveću brzinu postizava balon pri tom uspinjanju; 2) koliku će akceleraciju ponovo dobiti balon u trenutku, kad se iz njega izbaci $100\ kg^*$ tereta (pijeska); 3) kolika je u tom slučaju novopostignuta maksimalna brzina? (Izračunajte je ne kao pod točkom 1), nego, jednostavnije, uz pomoć razmjera!) — [Uputa: najveću brzinu balon postizava, kad sila uspinjanja balona postane jednaka otporu zraka $O = kqv^2$ (konstanta $k = 0{,}027$, ako brzinu v mjerimo u m/sek, površinu presjeka q u m^2, a otpor O u kg^*)].

120. Tanki sloj zraka, širine d, omeđen je (v. sliku!) s dvije točno paralelne stranice



dviju vrlo debelih staklenih ploča AA' i BB'. Zrake svjetlosti koje se reflektiraju na plohi A i na plohi B međusobno interferiraju; te zrake padaju okomito na plohe A, odnosno B. (Treba imati na umu, da se refleksija na plohi A vrši bez promjene znaka, dok ona na plohu B sa promjenom znaka). Treba odrediti: 1) razliku u fazi dviju reflektiranih zraka, one, reflektirane na A i one na B (općenito); 2) koje vrijednosti mora imati razmak d da bi se utrnule svjetlosti, kojih su duljine vala $0{,}8\ \mu$, $0{,}6\ \mu$ i $0{,}4\ \mu$; 3) koje sve duljine vala odjednom utrnu, ako je razmak d jednak $0{,}1\ mm$?

C. Rješenja iz matematike

192. *Конструисати график квадратне функције* $y = (x+1)^2 + 3x^2$; а) *користећи се тим графиком, дискутовати егзистенсију и знак корена једначине*

$$(x+1)^2 + 3x^2 = m \qquad (1)$$

б) *Одредити* m *уз услова:*

$$\frac{x_1}{x_1+1} + \frac{x_2}{x_2+1} = m,$$

где су x_1 *и* x_2 *корени једначине* (1).

Дата функција је $y = 4x^2 + 2x + 1$, теме параболе

$$T\left(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right);$$

она сече OY у $M(1, 0)$.

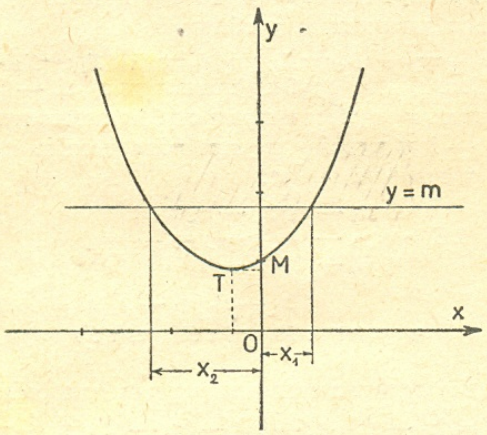
а) Корени једначине (1) су x_1 и x_2, уствари апсцисе пресека праве $y = m$ и параболе $y = (x+1)^2 + 3x^2$.

Из слике се чита непосредно:

$m > \frac{3}{4} \ldots x_1$ и x_2 су реални и различити,

$m = \frac{3}{4} \ldots x_1 = x_2$

$m < \frac{3}{4} \ldots$ нема реалних решења.



Ако је $\frac{3}{4} < m < 1$, оба корена негативна; за $m = 1$, $x_1 = 0$, $x_2 < 0$, $m > 1$, $x_1 > 0$, $x_2 < 0$.

б) Дати однос може се свести на релацију:

$$x_1 x_2 (2 - m) + (x_1 + x_2)(1 - m) - m = 0,$$

па како се из 1) добије

$$x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}, \quad x_1 x_2 = \frac{1 - m}{4},$$

излази

$$\frac{(1-m)(2-m)}{4} - \frac{1}{2}(1-m) - m = 0 \quad \text{или}$$

$$m^2 - 5m = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = 5.$$

И. Б.

193. *Sumu od A dinara trebalo je podijeliti među 3 lica tako da su njihovi dijelovi proporcionalni brojevima: $5-a$, 5, $5+a$, gdje je $0 < a < 5$. Međutim podjela je izvršena tako, da se njihovi dijelovi odnose kao 5, $5+a$, $5+2a$.*

a) Izraziti gubitak ili dobitak svakog lica u funkciji od a i A; b) uz pretpostavku $a = 2$ jedno je lice izgubilo 720 dinara. Kolika je suma podijeljena?

a) Ako nam x_1, y_1, z_1 znače dijelove prvog, drugog i trećeg lica u prvoj podjeli, to je

$$\frac{x_1}{5-a} = \frac{y_1}{5} = \frac{z_1}{5-a} \text{ i } x_1 + y_1 + z_1 = A \text{ t. j.}$$

$$x_1 = \frac{A}{15}(5-a), \; y_1 = \frac{A}{15} \cdot 5 = \frac{A}{3}, \; z_1 = \frac{A}{15}(5+a).$$

Slično je u drugoj podjeli

$$x_2 = \frac{5A}{3(5+a)}, \; y_2 = \frac{A}{3}, \; z_2 = \frac{A(5+2a)}{3(5+a)}.$$

Razlika između dobivene svote i svote, koju je trebalo dobiti pojedino lice, je za 1. lice

$$\frac{5A}{3(5+a)} - \frac{5A - Aa}{15} = \frac{Aa^2}{15(5+a)} \text{ t. j. to je}$$

dobitak prvog lica; za drugo lice $\frac{A}{3} - \frac{A}{3} = 0$;

za treće lice $\frac{A(5+2a)}{3(5+a)} - \frac{A(5+a)}{15} =$

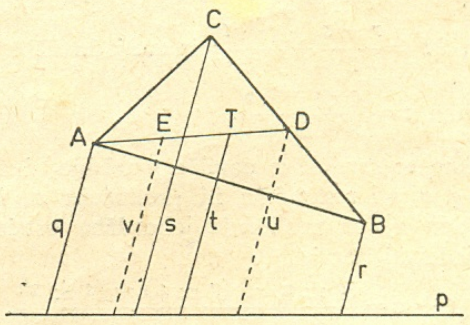
$$= -\frac{Aa^2}{15(5+a)} \text{ t. j. to je gubitak trećeg lica.}$$

b) Iz $\frac{Aa^2}{15(5+a)} = 720$ za $a = 2$ izlazi $A = 18\,900$ *Din.*

Provjera: prvo je lice trebalo dobiti 3780 *Din*, drugo 6300 *Din* treći 8820 *Din*; prvo je lice dobilo 4500 *Din*, drugo 6300 *Din*, treći 8100 *Din*; sva tri lica doblila su zajedno 18 900 *Dinara*, 720 *Din* je dobitak za prvo lice, a gubitak za treće lice.

Nikolić Ilonka, uč. 7 r. g.
Đakovo

194. *Iz vrhova A, B i C trokuta i njegova težišta T povučene su paralelne dužine q, r, s i t do zadanog pravca p; dokaži da je $t = \frac{q+r+s}{3}$! (Ako se dvije od točaka A, B, C i T nalaze za suprotnim stranama pravca p, duljine pripadnih paralela valja uzeti s protivnim predznacima).*



Iz sredine D stranice BC i sredine E dužine AT povukli smo do pravca p dužine u i v paralelne sa zadanim. Po poučku o srednjici trapeza izlazi: $u = \frac{r+s}{2}$, $v = \frac{q+t}{2}$, $t = \frac{u+v}{2}$;

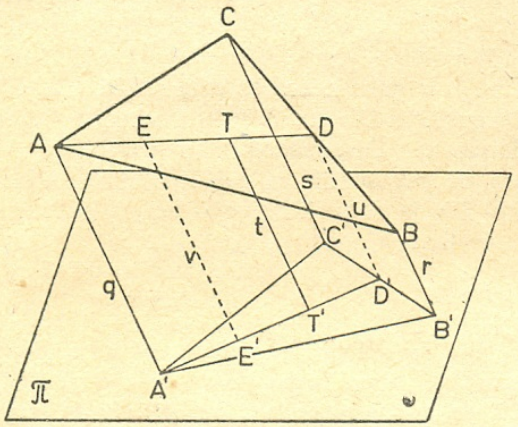
$2t = \frac{r+s}{2} + \frac{q+t}{2}$ i odatle $t = \frac{q+r+s}{2}$.

Ako se pravac p pomiče paralelno, dužine q, r, s i t skraćuju se ili produžuju za istu dužinu z, pa posljednja jednadžba ostaje u vrijednosti, jer je

$$t \pm z = \frac{(q \pm z) + (r \pm z) + (s \pm z)}{3}.$$

S. Šk-a

195. *Ako se iz vrhova A, B i C trokuta i njegova težišta T povuku do zadane ravnine π paralelne dužine q, r, s i t, dokaži, da je* $t = \frac{q+r+s}{3}$! *(Ako dvije od točaka A, B, C i T leže na suprotnim stranama ravnine π, valja njima pripadne dužine uzeti s protivnim predznakom.*



Iz sredine D stranice BC i sredine E dužine AT povukli smo do ravnine π dužine $DD' = u$ i $EE' = v$ paralelne sa zadanim. Po poučku o srednjici trapeza izlazi:

$$u = \frac{r+s}{2},\quad v = \frac{q+t}{2},\quad t = \frac{u+v}{2}$$

t. j. $2t = \frac{r+s}{2} + \frac{q+t}{2}$; iz ove jednadžbe nalazimo $t = \frac{q+r+s}{2}$.

Ako se ravnina π pomiče paralelno, dužine se q, r, s i t skraćuju ili produžuju za istu dužinu z, pa posljednja jednadžba ostaje u vrijednosti, jer je

$$t \pm z = \frac{(q \pm z) + (r \pm z) + (s \pm z)}{3}.$$

S. Šk-a

196. *Доказати да се преко поступака за особине детерминаната површина троугла пише изразом*

$2S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$

где су x_k и y_k $(k = 1, 2, 3)$ координате тјемена троугла.

Имамо формулу за површину троугла:

$$S = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)];$$

ако овај израз напишемо у облику детерминанте бит ће

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Треба доказати да се ова детерминанта може напнсати и у облику

$(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$.

Ако трећи стубац помножимо са -1 и додамо га првом и први стубац помножимо са -1 и додамо другом нова детерминанта изгледаће овако:

$$2S = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_1 & y_3 \\ 1 - 1 & 1 - 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_1 & x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_1 & y_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ако сада детерминанту развијемо биће

$2S = (x_1 - x_3)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_1 - y_3)$,

дакле

$2S = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$

што је и требало доказати.

Мариновић Радован
7д разр. гимн. Цетиње

197. *Ако* $D = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^3 \end{vmatrix}$

да се докаже, дека $D = D_1(x_1 + x_2 + x_3)$ *каде е* D_1 *Вандермондеова детерминанта*

$[D_1 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)]$.

На вториот и третиот ред го додаваме првиот помножен со (-1).

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^3 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_2^3 - x_1^3 \\ 0 & x_3 - x_1 & x_3^3 - x_1^3 \end{vmatrix} =$$

$= (x_2 - x_1)(x_3^3 - x_1^3) - (x_3 - x_1)(x_2^3 - x_1^3) =$
$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2) -$
$- (x_3 - x_1)(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) =$
$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3^2 + x_3x_1 + x_1^2 - x_2^2 -$
$- x_2x_1 - x_1^2) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)[(x_3^2 - x_2^2) +$
$+ x_1(x_3 - x_2)] = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)[(x_3 -$
$- x_2)(x_3 + x_2) + x_1(x_3 - x_2)] = (x_2 - x_1)(x_3 -$
$- x_1))(x_3 - x_2)(x_3 + x_2 + x_1)$.

Бошевски Томе
8 кл. г. „Ј. Б. Тито", Битола

198. *Izračunaj rastavljanjem na faktore i izlučivanjem zajedničkih faktora*

$$A = \frac{1}{a-b}\left[\frac{(a-b)^3 + (b-c)^3}{a-c} - (a+c+2b)^2\right].$$

$$A=\frac{1}{a-b}\left[\frac{(a-c)[(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2]}{a-c}-\right.$$
$$\left.-(a+c+2b)^2\right]=$$
$$=\frac{1}{a-b}[(a-b)^2-(a-b)(b-c)+(b-c)^2-$$
$$-(a+c+2b)^2]=$$
$$=\frac{1}{a-b}[(a-b)(a-b-b+c)+(b-c-$$
$$-a-c-2b)(b-c+a+c+2b)]=$$
$$=\frac{1}{a-b}[(a-b)(a+c-2b)+$$
$$+(-a-b-2c)(a+3b)]=$$
$$=\frac{1}{a-b}(a^2-ab+ac-bc-2ab+$$
$$+2b^2-a^2-ab-2ac-3ab-3b^2-6bc)=$$
$$=\frac{1}{a-b}(-7ab-7bc-b^2-ac)=$$
$$=-\frac{1}{a-b}[7b(a+c)+b^2+ac].$$

Miketinac Milivoj
uč. 6a r. 12. g. Zagreb

199. *Izračunaj rastavljanjem na faktore:*

$$A=\frac{[ax^2+(b-c)x-f]^2-[ax^2+(b+c)x-f]^2}{[ax^2+(b+e)x-f]^2-[ax^2+(b-e)x-f]^2}.$$

Imamo razliku kvadrata i u brojiocu i imeniocu. Prema tome

$$A=\frac{[(ax^2+bx-cx-f)-(ax^2+bx+cx-f)]}{[(ax^2+bx+ex-f)-(ax^2+bx-ex-f)]}\cdot$$
$$\cdot\frac{[(ax^2+bx-cx-f)+(ax^2+bx+cx+f)]}{[(ax^2+bx+ex-f)+(ax^2+bx-ex-f)]}=$$
$$=\frac{ax^2+bx-cx-f-ax^2-bx-cx+f}{ax^2+bx+ex-f-ax^2-bx+ex+f}\cdot$$
$$\cdot\frac{ax^2+bx-cx-f+ax^2+bx+cx+f}{ax^2+bx+ex-f+ax^2+bx-ex-f}=$$
$$=\frac{-2cx}{2ex}\cdot\frac{2ax^2+2bx-2f}{2ax^2+2bx-2f}=-\frac{c}{e}.$$

Bebić Dragan, 6_5 p. r. Vaљevo

200. Koje sve vrednosti može poprimiti razlomak

$$\frac{x^2-12x+27}{x^2-4x+15}?$$

Stavimo $\frac{x^2-12x+27}{x^2-4x+5}=m$ i odredimo m da korени dobivene jednačine u x buду realni:

$$x^2-12x+27=x^2m-4mx+5m$$
$$(1-m)x^2-(12-4m)x-5m+27=0.$$

Da korени buду realni mora $D\geqq 0$
tj. $(12-4m)^2-4(1-m)(27-5m)\geqq 0$
$-4m^2+32m+36\geqq 0\ |:(-4)$
$m^2-8m-9\leqq 0$

$$m_{1,2}=\frac{8\pm 10}{2},\ m_1=9,\ m_2=-1.$$

Zadani razlomak može poprimiti doista vrednosti samo između -1 i 9.

Drešević Milan, 7c p. 1 meš. r.
Bања Лука

201. *U krugu polumjera r odredi tetivu tako, da je zbroj od njezine duljine i njezine udaljenosti od središta jednak zadanoj duljini l.*

Diskusija!

Ako je tetivi pripadni središnji kut $2x$, to je

$$2r\sin x+r\cos x=l \quad \text{ili stavivši}$$

$$\sin x=\frac{2\,tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}},$$

$$\frac{4r\,tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+r\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=l$$

ili poslije sređivanja

$$(l+r)\,tg^2\frac{x}{2}-4r\,tg\frac{x}{2}+l-r=0.$$

Kako se $2x$ može mijenjati od 0^0 do 180^0, $\frac{x}{2}$ se može mijenjati između 0^0 i 45^0 a $tg\frac{x}{2}$ između 0 i 1. Zato treba ispitati, koliko ta jednadžba ima korijena između 0 i 1.

Zadatak ima samo 1 rješenje, ako je

$$f(0)f(1)<0 \qquad \text{ili}$$
$$(l-r)(l-2r)<0 \qquad \text{t. j.}$$
$$r<l<2r.$$

Zadatak ima 2 rješenja, ako je

1) $D\geqq 0$ t. j. $5r^2\geqq l^2,\ l^2\leqq 5r^2,\ l\leqq r\sqrt{5}$,
2) $f(0)>0$ t. j. $l-r>0,\ l>r$,
3) $f(1)>0$ t. j. $l-2r>0,\ l>2r$,
4) i 5) $0<\frac{2r}{l+r}<1$ t. j. $l<r$.

Dakle zadatak ima 2 rješenja; ako je

$$2r<l\leqq r\sqrt{5}.$$

S. Š.

Stojanovski Petar uzima za nepoznanicu duljinu tetive t, dolazi do jednadžbe

$$5t^2-8rt+4(l^2-8r^2)=0$$

i pomoću gore naznačenih uvjeta dolazi do istog rezultata.

202. *Odredi istokračni trokut ABC (AB = AC) upisan u krug polumjera r tako, da je zbroj* $3AD + 2BC = l$, *gdje je* $AD = x$ *visina tog trokuta. Diskusija! Uzmi u obzir, da x mora biti sadržano između 0 i* $\frac{l}{3}$.

Ako je baza istokračna trokuta BC, pripadna visina $AD = x$, to je $\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = x(2r - x)$, $BC = 2\sqrt{x(2r-x)}$ pa jednadžba problema glasi

$$3x + 4\sqrt{x(2r-x)} = l.$$

Odatle izlazi

$$4\sqrt{x(2r-x)} = l - 3x.$$

Kako je lijeva strana te jednadžbe pozitivna, mora takova biti i desna strana. Dakle mora biti $l - 3x > 0$, $3x < l$, $x < \frac{l}{3}$. Problem zadovoljavaju samo one vrijednosti od x, koje su pozitivne i manje od $\frac{l}{3}$.

Kvadriranjem dobivene jednadžbe dobivamo

$$32rx - 16x^2 = l^2 - 6lx + 9x^2 \quad \text{ili}$$
$$25x^2 - 2x(3l + 16r) + l^2 = 0,$$

x mora biti manje od $\frac{l}{3}$, ono je uvijek pozitivno i manje od $2r$.

Zadatak ima samo 1 rješenje ako je $f(0)f\left(\frac{l}{3}\right) < 0$; kako je $f(0) = l^2$, $f\left(\frac{l}{3}\right) = 25 \cdot \frac{l^2}{9} - \frac{2l}{3}(3l + 16r) + l^2 = \frac{16l}{9}(l - 6r)$, to mora biti $l^2 \cdot \frac{16l}{9}(l - 6r) < 0$ ili $l < 6r$.

Zadatak ima 2 rješenja, ako su ispunjeni uvjeti:

1) $D \geqq 0$ t. j. $(16r + 3l)^2 - 25l^2 \geqq 0$ ili $(16r + 8l)(16r - 2l) \geqq 0$ t. j. $l \leqq 8r$.
2) $f(0) > 0$ t. j. $l^2 > 0$ uvjet uvijek ispunjen.
3) $f\left(\frac{l}{3}\right) > 0$ t. j. $\frac{16l}{9}(l - 6r) > 0$, $l > 6r$

i napokon

4) i 5) $0 < \frac{16r + 3l}{25} < \frac{l}{3}$ ili $l > 3r$.

Svi su ti uvjeti ispunjeni za

$$6r < l \leqq 8r.$$

Granične vrijednosti ispitaj sam. *S. Š.*

Iliškovi ć Aleksander ispituje kad su korijeni jednadžbe $16(l^2 - 6lr)y^2 - 96lry + 9l^2 = 0$, koja se dobiva iz gornje jednadžbe supstitucijom $y = x : \left(\frac{l}{3} - x\right)$, > 0 i dolazi do istog rezultata.

203. *Neka se odredat vrednostite za x izmeg'u* 0 *i* 2π, *koi je zadovolјuvat neravenkata:*

$$4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} > 0.$$

Од $4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} = 0$ следува

$$(\sin x)_{1/2} = \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3}}}{4} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 + 2\sqrt{3} + 3 - 4\sqrt{3}}}{4} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{1 - 2\sqrt{3} + 3}}{4} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3} \pm \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2}}{4} =$$
$$= \frac{1 + \sqrt{3} \pm (1 - \sqrt{3})}{4}$$

$$(\sin x)_1 = \frac{1 + \sqrt{3} - 1 + \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sin x)_2 = \frac{1 + \sqrt{3} - 1 - \sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2}.$$

$4\sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3})\sin x + \sqrt{3} > 0$ за

$$-1 < \sin x < \frac{1}{2}, \quad 1 > \sin x > \frac{\sqrt{3}}{2},$$

т. е. за

$0 < x < 30°$, $60° < x < 120°$, $150° < x < 360°$.

Бошевски Томе 8 кл. г. „J. Б. Тито“, Битола

Решили задатке из 3. броја

Бошевски Томе, 8*b* кл. г. J. Б. Тито, Битола, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 201, 202, 203; *Вујатовић Саво*, 7*b* р. г. Цетиње, 197; *Вујин Б. Миле*, г. Зрењанин, 192, 194, 198, 199, 203; *Голубовић Владимир*, 7_7 р. гимн. Лесковац, 192, 198, 199, 201, 203; *Грубишић Петар*, 6_4 р. гимн. Приштина, 194, 195; *Дрешевић Милан*, 7*c* р. г. Бања Лука, 200; *Ћирић Драгољуб*, 8_2 р. 2 осмог. шк. Неготин, 198, 199; *Јажић ин Лазар*, 8*a* р. г. С. Митровица, 192, 193, 194; *Карамаџиев Димитар*, 6*a* кл. г. „J. Јосифовски“ Гевгелија, 199; *Константиновић Милован*, 5_2 р. г. Ћуприја, 199; *Костић Мирослав*, 6_2 р. г. Бела Паланка, 199; *Марић Данило*, 8_4 р. 7 беог. г. 192, 193, 199, 200; *Маринова Виктор ија*, 6_2 кл. г. J. Б. Тито, Битола, 192, 199, 200, 201, 202, 203; *Мариновић Радован*, 7*b* р. г. Цетиње, 192, 193, 196, 197, 203; *Миланов Александар*, 8*b* р. г. Босиљеград,

192, 193, 194, 195, 201; *Milovanović Đorđe*, 8_4 p. g. Kruševac, 194, 198, 199, 201, 203; *Mudrinski Bojislav*, 6*d* p. g. „Sv. Marković“, Novi Sad, 197, 201; *Nadrljanski Sava*, 6 p. g. „Uroš Predić“, Pančevo, 199; *Petković Dragiša*, 7_3 p. g. Kruševac, 199, 203; *Radovanović Nikoslav*, 5_2 p. gimn. „S. Sremac“, Niš, 194, 198, 199; *Radulović Života*, 8_3 p. g. Kruševac, 194, 195, 199, 203; *Stojanovski Petar*, 8 kl. g. J. B. Tito, Bitola, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 201, 202, 203; *Todorović Dušan*, 8_2 p. g. Negotin, 203; *Cvetković Dragoš*, 5*a* p. g. Sr. Mitrovica, 199; *Galić Stanko*, 5 r. g. Lištica, 199; *Gros Mladen*, 5*a* r. kl. g. Ljubljana; *Ilišković Aleksandar*, 8*b* r. g. Doboj, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203; *Kovačić Zdenka*, 8*b* r. g. Sl. Požega, 192, 193, 196, 197, 200, 201, 203; *Ljupša Danilo*, 7*c* r. 1. g. Maribor, 198, 199; *Martinis Vinko*, 7_1 r. g. „F. Višnjić“ Bijeljina, 192, 193, 198, 199, 203; *Miketinac Milivoj*, 6*a* r. 12. g. Zagreb, 198, 199; *Nikolić Ilonka*, 7. r. g. Đakovo, 192, 193, 198, 199, 203. *

Решења из 2 броја

Бадамов Петар, 8*a* кл. г. „Ув. Димов“, Скопје, 181, 188; *Киноковски Томе*, 8_2 кл. г. Ј. Б. Тито. Битола, 191, 185; *Ковачевић Мирослав*, 6_1 р. г. Трстеник 181, 184, 186; *Мадојевић Драгољуб*, 8 р. г. Плевље, 182, 183, 184, 186, 187, 188; *Милојевић Милош*, 8_1 р. г. Аранђеловац, 188, 191; *Симеуновић Олга*, 5_3 р. беог. г. 181, 186.

D) Rješenja zadataka iz fizike

111* *Na kosini, priklonjenoj prema horizontalnoj ravnini pod kutom $\alpha = 10°$, stoji uspravan valjak, polumjera $r = 5$ cm. Koju najveću visinu v može imati valjak, a da se ne izvrne?*

Rješenje: Maksimalna visina valjka mora biti takova, da vertikala spuštena iz težišta valjka pada upravo na obodnicu osnovke valjka (nacrtaj sliku!). Težište valjka nalazi se u polovištu visine (osi) valjka. Imat ćemo:

$$\frac{1}{2} v = r \operatorname{ctg} \alpha = 5 \cdot 5{,}6713$$

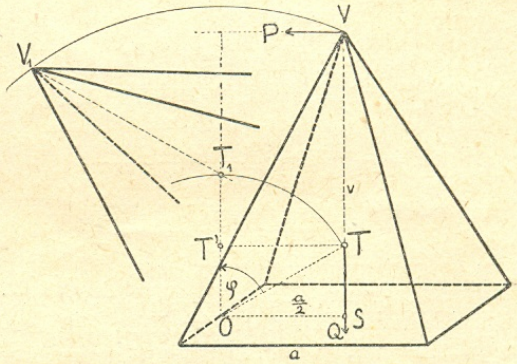
$$\underline{v = 56{,}71 \text{ cm}}.$$

Riješili:

Lojen Miroslav, 5.b r. g. Varaždin; *Miketinac Milivoj*, 6.a r. 12. g. Zagreb; *Milovanović Nikola*, Sr. tex. šk. Mostar; *Martinović Radovan*, 7b p. g. Cetinje; *Stojanovski Petar*, 8 kl. B. g. Bitola; *Kosec Vladimir*, 7. r. 12. g. Ljubljana; *Milovanović Đorđe*, 8 p. B. m. g. Kruševac; *Kovačić Zdenka*, 8.b r. gimn. Sl. Požega; *Milanov Aleksandar*, 8 p. Bosiljegrad; *Boševski Tome*, 8 p. B. g. Bitola; *Radulović Života*, 7 p. g. Kruševac (prib.). *Prizl Dragutin*, 8. r. g. Varaždin; *Petrićević Verica*, 7 p. B. gimn. Vranje (prib.); *Jovanović Mile*, 7 p. g. Vranje.

* Za vrijeme štampanja lista stigla su nam neka vrlo uspjela rješenja, koja nažalost nismo mogli donijeti. Ističemo naročito osobito lijepa rješenja *Ilišković Aleksandra* iz Doboja, *Stojanovski Petra* iz Bitola i *Čepulić Vladimira* iz Zagreba.

112. *Kamena kvadratična piramida ima visinu $v = 12$ dm, osnovni brid $a = 9$ dm i spec. težinu $s = 2{,}8$. Težište svake pravilne uspravne piramide nalazi se na visini $v_1 = \frac{v}{4}$ iznad središta osnovke. Pita se: 1. kolika mora biti najmanja horizontalna sila P s hvatištem u vrhu piramide, koja će moći izvrnuti tijelo oko jednog osnovnog brida; 2, za koliki kut φ moramo zakrenuti piramidu, da bi ona upravo pala; 3. kolika je do tog trenutka izvršena radnja R?*



Rješenje: Moment sile P (vidi sliku!) s obzirom na lijevi osnovni brid, mora biti jednak momentu težine Q tijela s obzirom na taj isti brid, koji predočuje os zakretanja:

$$P \cdot v = Q \cdot \frac{a}{2}$$

$$P = \frac{a}{2v} \cdot Q.$$

Kako je težina Q piramide:

$$Q = V \cdot s = \frac{1}{3} a^2 v \cdot s,$$

imamo:

$$P = \frac{1}{6} a^3 s = \frac{1}{6} \cdot 729 \cdot 2{,}8 \text{ kg}^*$$

$$\underline{P = 340{,}2 \text{ kg}^*}.$$

2. Piramidu treba zakretati tako dugo (za kut φ), dok njeno težište T padne u verti-

kalnu ravninu, položenu osnovnim bridom oko kojeg zakrećemo piramidu. Tad će biti (vidi sliku!):

$$tg\,(90-\varphi)=\frac{\frac{v}{4}}{\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}\frac{v}{a}=ctg\,\varphi,$$

odatle nađemo (logaritmički) za φ vrijednost:

$$\varphi=56°18'36''.$$

3. Radnja R do trenutka, kad je težište stiglo u spomenutu vertikalnu ravninu jednaka je radnji, koja bi bila potrebna, da se piramida, odnosno njeno težište digne iz svog prvobitnog položaja (T) do visine položaja težišta (T_1), podignutog u vertikalnu ravninu, dakle iz točke T' (koja je u istoj horizontalnoj ravnini kao T) u točku T_1:

$$R=Q\cdot\overline{T'T_1}=Q\cdot(\overline{OT_1}-\overline{OT'})=Q\,(\overline{OT}-\overline{OT'})$$

$$\overline{OT}=\sqrt{\frac{v^2}{16}+\frac{a^2}{4}}$$

$$\overline{OT'}=\frac{v}{4}$$

$$\overline{OT}-\overline{OT'}=\sqrt{\frac{v^2}{16}+\frac{a^2}{4}}-\frac{v}{4}$$

$$R=\frac{1}{3}a^2vs\left(\sqrt{\frac{v^2}{16}+\frac{a^2}{4}}-\frac{v}{4}\right)$$

$$R=2185\ kg^*dm=218{,}5\ kg^*m.$$

Djelomično riješili:

Миловић Никола, Ср. тех. школа Мостар; *Lojen Miroslav*, 5.b r. g. Varaždin; *Мартиновић Радован*, 7б р. г. Цетиње; *Стојановски Петар*, 8 кл. В. г. Битола; *Бошевски Томе*, 8 р. В. г. Битола; *Kosec Vladimir*, 7. r. 12. g. Ljubljana.

113. *U otvorenoj bakrenoj posudi, teškoj 1,5 kg* nalazi se komad leda od 10 kg* pri temperaturi —10° C. Pita se: 1. ako se ovamo uštrca 2,5 kg* vodenih para od 100° C, kolika će biti konačna temperatura čitavog sustava? 2. koliko bi kg* para od 100° C bilo potrebno dovesti, da se postigne konačna temperatura sustava 100° C? (Spec. toplina bakra = 0,09, leda 0,5, tališna toplina leda = 80 kgcal/kg, toplina isparavanja vode = 539 kgcal/kg).*

Rješenje: 1) Označimo sa t konačnu temperaturu sustava. Toplina, koju su pare predale sustavu sastoji se a) iz topline Q_1, što je pare oslobode pri svojoj kondenzaciji u vodu pri 100° C:

$$Q_1=2{,}5\cdot 539\ kcal;$$

b) iz topline Q_2, što je ta nastala voda predaje sustavu prijelazom sa temperature od 100° C na temperaturu od t° C:

$$Q_2=2{,}5\,(100-t)\ kcal.$$

Ukupno su pare predale sustavu topline $Q=Q_1+Q_2$:

$$Q=Q_1+Q_2=2{,}5\,(639-t).$$

Ta se toplina utroši α) na zagrijavanje bakrene posude sa —10° C na t° C:

$$Q'_1=1{,}5\cdot 0{,}09\,[t-(-10)]=0{,}135\,t+1{,}35\ kcal;$$

β) na zagrijavanje leda od —10° do 0° C:

$$Q'_2=10\cdot 0{,}5\cdot 10=50\ kcal;$$

γ) na taljenje leda pri 0° C:

$$Q'_3=10\cdot 80=800\ kcal;$$

δ) na zagrijavanje vode, nastale iz leda, od 0° C na t° C:

$$Q'_4=10t\ kcal.$$

Ukupno utrošena toplina Q' jednaka je zbroju ovih četiriju toplina:

$$Q'=Q'_1+Q'_2+Q'_3+Q'_4=$$
$$=10{,}135\,t+851{,}35\ kcal.$$

Iz jednakosti predane topline Q i utrošene Q' izlazi:

$$2{,}5\,(639-t)=10{,}135\,t+851{,}35, \qquad (1)$$

odakle izlazi

$$t=59°C.$$

2) Da bismo odredili količinu vodenih para od 100° C potrebnih da se sustav na kraju zagrije na 100° C moramo u jednadžbu (1) umjesto 2,5 *kg* para staviti nepoznati broj x, a za t temperaturu od 100° C:

$$x\,(639-100)=10{,}135\cdot 100+851{,}35$$

odakle je

$$x=3{,}46\ kg.$$

Riješili:

Цветковић Драгош, 5а В. м. г. Ср. Митровица; *Gros Mladen*, 5a r- kl. g. Ljubljana; *Lojen Miroslav*, 5.b r. g. Varaždin; *Стојановски Петар*, 8 р. В. г. Битола; *Бошевски Томе*, 8 р. В. г. Битола (делом.)

114. *Na parnu turbinu struji svake sekunde 1 kg para brzinom od 750 m/sek. Turbina pokreće dinamostroj. Koliko će kilovata moći trajno proizvoditi dinamostroj pri napetosti 5000 volti, ako se u sustavu izgubi 40% energije para?*

Rješenje: Kinetička energija E para, koje u jednoj sekundi udare o turbinu, je:

$$E=\frac{mv^2}{2}=\frac{1000\cdot 75000^2}{2}=281{,}25\cdot 10^{10}\ erga/sek$$

$E = 281{,}25 \cdot 10^3$ *džula/sek* $= 281{,}25$ *kW* (*kilovata*)
40% od E je $E_1 = 112{,}5$ *kW*.

Snaga S dinamostroja bit će:

$$S = E - E_1 = 168{,}75 \text{ kW},$$

a jakost struje I pri 5000 *volti* napetosti bit će

$$I = \frac{S}{V} = \frac{168750}{5000} \text{ amp}$$

$$I = 33{,}75 \text{ ampera}.$$

Rješili:

Стојановски Петар, 8 p. B. гимн. Битола; *Gros Mladen*, 5.a r. kl. g. Ljubljana (približno); *Бошевски Томе*, 8 p. B. r. Битола.

115. *Žarulja od 220 volta troši 0,5 ampera i pritom ugrije 600 g vode u* $3\frac{1}{3}$ *minute za 7,9° C. Koliko se posto od žarulji dovedene energije pretvori u svjetlost?*

Rješenje: Energija, kojom se grije žarulja u svakoj sekundi, jest:

$$S = 220 \cdot 0{,}5 = 110 \text{ vata}.$$

Od toga se utroši na zagrijavanje vode (u svakoj sekundi) količina topline Q:

$$Q = \frac{0{,}6 \cdot 7{,}9}{200} \text{ kcal/sek} = 0{,}0237 \text{ kcal/sek}.$$

Budući da je *kcal/sek* $= 4187$ *džula/sek* $=$ $= 4187$ vata, bit će:

$$Q = 0{,}0237 \cdot 4187 \text{ vata} = 99{,}23 \text{ vata}.$$

Prema tome se na svjetlost utroši, svake sekunde, energija S_1:

$$S_1 = 110 - 99{,}23 \text{ vata} = 10{,}77 \text{ vata}$$

$$S_1 = 9{,}75\% \text{ od } S.$$

Rješili:

Babić Nada-Gordana, 7.a r. g. Vinkovci; *Pustišek, Ljerka*, 7.a r. 14. gimn. Zagreb; *Gros Mladen*, 5.a r. kl. g. Ljubljana (približno); *Lojen Miroslav*, 5.b r. g. Varaždin; *Бошевски Томе*, 8. p. B. r. Битола; *Prizl Vladimir*, 8. r. g. Varaždin.

Vježbe za učenike viših raz. gimn.

Rješavanje kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$ metodom sukcesivnih aproksimacija

Formula, koja nam daje korijene kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

nezgodna je za numerička izračunavanja, kad je a vrlo maleno prema b i c. To potječe odatle, što će korijeni biti nedovoljno približno izračunati, jer kako $b^2 - 4ac$ nije u općenitom slučaju potpuni kvadrat, samo se aproksimativno dobiva $\sqrt{b^2 - 4ac}$; a jer treba $\sqrt{b^2 - 4ac}$ podijeliti s $2a$, gdje je a vrlo maleno, pogreška može postati velika.

U takvim se slučajevima jedan korijen dobiva lakše i brže metodom *sukcesivnih aproksimacija;* kad je jedan korijen izračunat tom metodom, drugi se korijen nalazi, ako poznati korijen oduzmemo od zbroja korijena.

Metoda sukcesivnih aproksimacija sastoji se u tom: iz jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{izlazi}$$

$$x = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}x^2 \qquad (1)$$

Kako je a vrlo maleno, a x ima konačnu vrijednost, član $\frac{ax^2}{b}$ je također vrlo malen; ako ga zanemarimo, možemo pisati kao prvu približnu vrijednost nepoznanice

$$x = -\frac{c}{b}.$$

Ako sad u desnu stranu jednadžbe (1) stavimo $x_1 = -\frac{c}{b}$, dobivamo drugu aproksimaciju

$$x_2 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}.$$

Zamijenimo li opet x u desnoj strani jednadžbe (1) s x_2, imamo u trećoj aproksimaciji

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3}\right)^2$$

ili ako razvijemo

$$x_3 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{a^3c^4}{b^7}.$$

Ako u tom izrazu zanemarimo posljednji član, koji je prema prethodnom vrlo malen, pa ako zamijenimo opet x s tako dobivenim brojem, izlazi

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{a}{b}\left(-\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5}\right)^2,$$

ili ako razvijemo i reduciramo

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7} - \frac{4a^4c^5}{b^9} - \frac{4a^5c^6}{b^{11}}$$

Zanemarivši u tom izrazu iz istih razloga kao prije posljednja 2 člana, dobivamo

$$x_4 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - \frac{2a^2c^3}{b^5} - \frac{5a^3c^4}{b^7}.$$

Diskusija. Neka je $x = -\frac{c}{b} - \frac{ax^2}{b}$ ili $x = \alpha + \beta x^2$, gdje je $\alpha = -\frac{c}{b}$, $\beta = -\frac{a}{b}$.

Možemo uvijek pretpostaviti, da je α pozitivno; ako je α negativno, zamijenimo x u $-x$; time se b mijenja u $-b$ pa $-\frac{c}{b} = \alpha$ postaje pozitivno. Onda treba izračunati $-x$; iz $-x$ izlazi lako x.

Na pr. ako treba riješiti jednadžbu

$$0{,}001x^2 + 5x + 36 = 0,$$

treba razmatrati jednadžbu

$$0{,}001x^2 - 5x + 36 = 0, \quad \text{gdje je } \alpha = -\frac{c}{b}$$

pozitivno. Korijeni posljednje jednadžbe jednaki su i protivna predznaka korijenima zadane jednadžbe.

Treba dakle da razmatramo samo 2 tipa jednadžbi već prema tomu da li je $\beta > 0$ ili je $\beta < 0$.

1) $\beta > 0$, $x = \alpha + \beta x^2$; sve su vrijednosti od x t. j. x_1, x_2, x_3, manje od tražene vrijednosti, jer je α premalena vrijednost, pa ako α zamijenimo s x, dobit ćemo opet odviše malenu vrijednost i t. d.

Sve te približne vrijednosti, kako se vidi, sve više i više rastu, one se sve više i više približavaju točnoj vrijednosti.

Metoda ne dopušta izračunati granicu pogreške.

2) $\beta < 0$. Vrijednosti od x t. j. x_1, x_2, x_3 naizmjence su odviše velike i odviše malene, jer je $x_1 = \alpha$ odviše veliko; dakle vrijednosti x_2 odgovara odviše veliki suptrahend, pa je x_2 odviše maleno; dalje je x_3 odviše veliko i t. d.

Primjer 1. Neka se riješi jednadžba:

$$0{,}001x^2 - x + 2 = 0, \quad \text{gdje je } \beta = -\frac{a}{b} > 0.$$

$x = 2 + 0{,}001x^2$, $\beta > 0$.

$x_1 = 2$,

$x_2 = 2 + 0{,}001 \cdot 4 = 2{,}004$,

$x_3 = 2 + 0{,}001 \cdot 2{,}004^2 = 2 + 0{,}004\,016\,016 =$
$= 2{,}004\,016\,016.$

Sve se približne vrijednosti uvećavaju ali ostaju manje od prave vrijednosti.

Ako bismo računali na obični način. dobili bismo

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 0{,}008}}{0{,}002} = \frac{1 \pm \sqrt{0{,}992}}{0{,}002}.$$

Nakon dosta dugog i mučnog računanja nalazimo

$$\sqrt{0{,}9920} = 0{,}99\,599\,196\ldots,$$

pa je približno

$$x = \frac{1 - 0{,}99\,599\,196}{0{,}002} = \frac{0{,}00\,400\,804}{0{,}002} =$$
$$= 2{,}00\,402;$$

drugi je korijen, jer je njihov zbroj

$$\frac{1}{0{,}001} = 1000,$$

jednak $x_2 = 997{,}99598\ldots$

Vidimo, da metodom sukcesivnih aproksimacija dolazimo mnogo brže do dosta točne približne vrijednosti.

Uzmimo sad primjer, gdje je $\beta < 0$.

Primjer 2. Neka se riješi jednadžba

$$0{,}001x^2 + x - 2 = 0, \quad \alpha > 0, \quad \beta < 0.$$

Jednadžba se može pisati:

$$x = 2 - 0{,}001x^2. \qquad (2)$$

Prva približna vrijednost je $x_1 = 2$; druga je približna vrijednost

$x_2 = 2 - 0{,}001 \cdot 4 = 1{,}996$; treća je

$x_3 = 2 - 0{,}001 \cdot 1{,}996^2 = 1{,}996\,015\,984.$

Vidimo, da je druga korekcija dodala tek 16 milijuntina drugoj približnoj vrijednosti; x_1 je odviše veliko, x_2 je odviše maleno, x_3 odviše veliko i tako naizmjence dobivamo odviše velike i odviše malene brojeve.

Ako bismo računali na obični način, treba izračunati

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1{,}008}}{0{,}002}.$$

Nakon dužeg računanja nalazi se približno

$$\sqrt{1{,}008} = 1{,}003\,992\,032\ldots \quad \text{pa je}$$

$$x = \frac{-1 + 1{,}003\,992\,032}{0{,}002} =$$

$$= \frac{0{,}003\,992\,032}{0{,}002} = 1{,}996\,016.$$

Korijeni kvadratne jednadžbe mogu se pisati i u obliku

$$x = \frac{1}{2a}\left[-b \pm b\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

pa se na izraz $\left(1 - \frac{4ac}{b^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ može primijeniti Newtonov binomni poučak; dobivamo, da je taj izraz jednak

$$1 - \frac{1}{2}\frac{4ac}{b^2} - \frac{1}{2 \cdot 4}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^2 -$$
$$- \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\left(\frac{4ac}{b^2}\right)^4 - \ldots$$

pa se onda konačno dobiva

$$x_1 = -\frac{c}{b} - \frac{ac^2}{b^3} - 2\frac{a^2c^3}{b^5} - 5\frac{a^3c^4}{b^7} - \cdot$$

Na pr. u predašnjem je primjeru trebalo izračunati $\sqrt[3]{1 + 0{,}008}$; to je jednako

$1 + 0{,}004 - 0{,}000\,008 + 0{,}000\,000\,032 \ldots$,

te je

$$x = 0{,}003\,992\,032 \cdot 500 = 1{,}996\,016.$$

Metodama više matematike može se odrediti i granica pogreške dobivenih rezultata.

Vježbe za učenike 4. r. gimnazije (8. razr. osmogod. škole)

Algebra

1. Riješi jednadžbu

$(x - 3)^3 (x + 5) - (x + 1)^3 (x - 7) = 0.$

Dobivamo $(x^3 - 9x^2 + 27x - 27)(x + 5) - (x^3 + 3x^2 + 3x + 1)(x - 7) = 0$. Rješavanjem zagrada i redukcijom istoimenih članova izlazi $128x = 128$, $x = 1$.

2. Riješi sistem

$$\frac{2x - 3y - 14}{3} - \frac{3x - 2y - 18}{4} = -2,$$

$$\frac{4x - 5y + 7}{2} - \frac{-3y + 2x - 4}{5} = 5.$$

Množenjem prve jednadžbe s 12, druge s 10 i uređenjem dobivenih jednadžbi izlazi

$$-x - 6y = -22$$
$$16x - 19y = 7.$$

Iz tog sistema izlazi $x = 4$, $y = 3$.

3. Riješi sistem:

$$\frac{4}{1 - 2x + 3y} + \frac{3}{1 - 3x + 2y} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{2}{1 - 2x + 3y} - \frac{5}{1 - 3x + 2y} = -\frac{1}{6}.$$

Stavi $\frac{1}{1 - 2x + 3y} = u$, $\frac{1}{1 - 3x + 2y} = v$,

imamo $4u + 3v = \frac{5}{6}$, $2u - 5v = \frac{3}{2}$ ili

$$24u + 18v = 5,\ 4u - 10v = 3.$$

Iz tih jednadžbi izlazi $u = \frac{1}{3}$, $v = -\frac{1}{6}$,

pa je $1 - 2x + 3y = 3$, $1 - 3x + 2y = -6$ ili $-2x + 3y = 2$, $-3x + 2y = -7$. Odatle se dobiva $x = 5$, $y = 4$.

4. Odredi linearnu funkciju, koja za $x = -4$ poprima vrijednost 3, a za $x = 5$ vrijednost 12.

Svaka se linearna funkcija može napisati u obliku $y = ax + b$, gdje treba odrediti a i b. Kako linearna funkcija za $x = -4$ poprima vrijednost 3, a za $x = 5$ vrijednost 12, mora biti $3 = -4a + b$, $12 = 5a + b$, odakle izlazi $a = 1$, $b = 7$, te je tražena funkcija $y = x + 7$.

5. Pokaži na linearnoj funkciji $y = 3x + 4$ 1) da ona raste, kad x raste, 2) da jednakim promjenama varijable x odgovaraju jednake promjene linearne funkcije.

1) Uzmi za x bilo koju vrijednost, na pr. $x = 2$, pripadno y je $3 \cdot 2 + 4 = 6 + 4 = 10$; neka x naraste za neki broj h, tako da je nova vrijednost od x $2 + h$; pripadno y je $3(2 + h) + 4 = 6 + 3h + 4 = 10 + 3h$; dakle je novo y za $3h$ veće, pa možemo reći: linearna funkcija $y = 3x + 4$ raste, kad x raste. Kad bi bila zadana funkcija $y = -3x + 4$, novo y bilo bi za $-3h$ veće t. j. za $3h$ manje t. j. ta bi funkcija padala, kad x raste. Općenito vrijedi:

Linearna funkcija $y = ax + b$ raste, kad x raste, ako je a pozitivno, ona se umanjuje, kad x raste, ako je a negativno.

Nacrtaj slike tih funkcija za $a > 0$ i $a < 0$ i uvjeri se o tom na slici!

2) Pođimo opet od $x = 2$, pripadno y je 10; neka x naraste za h, pripadno y je $3(2 + h) + 4 = 10 + 3h$; y je dakle naraslo za $3h$; uzmimo sad na pr. vrijednost 8, pripadno y je $3 \cdot 8 + 4 = 28$; neka x naraste opet za h, novo y je $3(8 + h) + 4 = 28 + 3h$, dakle opet za $3h$ veće. To kažemo ovako: *jednakim promjenama varijable x odgovaraju jednake promjene linearne funkcije.*

6. Šesteroznamenkasti broj ima na najvišem mjestu znamenku 9. Ako se ta znamenka uzme odavle i stavi na drugi kraj broja, dobije se $\frac{1}{4}$ prvog broja. Koji je to broj?

Šesteroznamenkasti broj, koji ima 9 na prvom mjestu, može se pisati $900\,000 + x$, gdje je x broj što ga čine ostale znamenke. Ako stavimo 9 na kraj, dobivamo broj $10x + 9$, pa je prema uvjetu zadatku

$4(10x + 9) = 900\,000 + x$, odakle izlazi $x = 23076$ i broj je 923 076.

7. Koliko treba uzeti čistog srebra, a koliko srebra čistine 0,800, da se dobije $8\frac{3}{4}$ *kg* srebra čistine 0,920?

Problem rješavamo imajući na umu da je ukupna množina čistog srebra prije staljivanja jednaka ukupnoj množini čistog srebra poslije staljivanja.

Ako je tražena količina čistog srebra x *kg*, to je ukupna množina čistog srebra prije staljivanja $x + (8\frac{3}{4} - x) \cdot 0{,}800$, a poslije staljivanja $8\frac{3}{4} \cdot 0{,}920$. Zato imamo jednadžbu

$x + (8{,}75 - x)\cdot 0{,}800 = 8{,}75\cdot 0{,}920$ ili
$x + 7 - 0{,}8x = 8{,}05$ t. j.
$100x + 700 - 80x = 805$

$$20x = 105, \quad x = \frac{105}{20} = 5{,}25\ kg$$

Geometrija

8. Oko istostranog stošca stranice s je opisana kugla. Kako se odnose *a*) oba oplošja, *b*) oba obujma!

Visina je stošca (nacrtaj sliku!) $\frac{s}{2}\sqrt{3}$; polumjer je opisane kugle jednak

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{s}{2}\sqrt{3} = \frac{s}{3}\sqrt{3}.$$

Oplošje je stošca

$$O_1 = 3\cdot\left(\frac{s}{2}\right)^2\pi = \frac{3s^2}{4}\pi.$$

Oplošje je kugle

$$O_2 = 4\left(\frac{s}{3}\sqrt{3}\right)^2\pi = 4\cdot\frac{s^2}{9}\cdot 3\pi = \frac{4}{3}s^2\pi.$$

Zato je

$$O_1 : O_2 = \frac{3s^2}{4}\pi : \frac{4}{3}s^2\pi = 9 : 16.$$

Obujam je stošca

$$V_1 = \frac{\left(\frac{s}{2}\right)^3\pi\sqrt{3}}{3} = \frac{s^3\pi\sqrt{3}}{24};$$ obujam je kugle

$$V_2 = \frac{4}{3}\left(\frac{s}{3}\sqrt{3}\right)^3\pi = \frac{4}{3}\cdot\frac{s^3}{9}\cdot 3\cdot\frac{s}{3}\sqrt{3} = \frac{4s^3}{27}\sqrt{3}\pi;$$

zato je $V_1 : V_2 = \frac{s^3\pi\sqrt{3}}{24} : \frac{4s^3\sqrt{3}\,\pi}{27} = \frac{1}{24} : \frac{4}{27} =$
$= 9 : 32.$

9. Oko zadane kugle polumjera ρ opisan je uspravan valjak i uspravan stožac. Kako se odnose oplošja i obujmovi tih triju tijela?

Visina je valjka 2ρ, oplošje $O_v = 6\rho^2\pi$; kako je polumjer u istostraničnu trokut stranice a upisane kružnice jednak $\frac{1}{3}$ visine istostranična trokuta, t. j. $\rho = \frac{1}{3}\,\frac{a}{2}\sqrt{3} = \frac{a}{6}\sqrt{3}$, to je $a = \frac{6\rho}{\sqrt{3}} = 2\rho\sqrt{3}$; polumjer baze stošca je $r = \frac{a}{2} = \rho\sqrt{3}$; njegovo je oplošje $O_s =$
$= 3(\rho\sqrt{3})^2\pi = 3\rho^2\cdot 3\pi = 9\rho^2\pi$. Zato je
$O_k : O_v : O_s = 4\rho^2\pi : 6\rho^2\pi : 9\rho^2\pi = 4 : 6 : 9.$
Obujam je kugle $V_k = \frac{4}{3}\rho^3\pi$, obujam je valjka $V_v = 2\rho^3\pi$, obujam je stošca $V_s = \frac{(\rho\sqrt{3})^3\pi\sqrt{3}}{3} = 3\rho^3\pi$. Zato je $V_k : V_v : V_s =$

$$= \frac{4}{3}\rho^3\pi : 2\rho^3\pi : 3\rho^3\pi = 4 : 6 : 9.$$

10. Koliko je oplošje i obujam kugle opisane oko kvadra, komu su dimenzije $a = 22\ cm$, $b = 4\ cm$, $c = 20\ cm$.

Promjer opisane kugle jednak je dijagonali kvadra. Kako je $d^2 = 22^2 + 4^2 + 20^2 = 484 + 16 + 400 = 900$, to je $d = 30$, $r = 15$.

$O = 4\cdot 15^2\pi = 900\pi = 2826\ cm^2$, $V = \frac{4}{3}\,15^3\pi =$
$= 4\cdot 5\cdot 15^2\pi = 4500\pi = 14130\ cm^3$.

11. Koliko je teška pravilna 4 strana piramida od drva, kojoj je baza upisana u krug polumjera $r = 12\ cm$ i kojoj je pobočni brid $b = 13\ cm$, ako je specif. težina drva $0{,}7\,\frac{g}{cm^3}$?

Obujam je piramide

$$V = \frac{a^2}{3}v; \quad v = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5\ cm;$$

kako je $a^2 + a^2 = 4r^2$ ili $2a^2 = 4r^2$, $a^2 = 2r^2$, to je $V = \frac{288}{3}\cdot 5 = 96\cdot 5 = 480\ cm^3$; težina iznosi $480\cdot 0{,}7 = 336\ g$.

12. Koliko se olovnih kugala s polumjerom od 1 *cm* može saliti iz olovne kugle polumjera 10 *cm*. Za koliko je oplošje tih kugala veće od oplošja kugle, iz koje smo ih salili?

Mjerni broj obujma jedne salivene kugle je $\frac{4\pi}{3}$, mjerni broj obujma zadane kugle polumjera 10 *cm* je $\frac{4\pi}{3}\cdot 1000$. Iz $x\cdot\frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\cdot 1000$ izlazi $x = 1000$. Oplošje je zadane kugle 400π, oplošje salivenih kugala $4\pi\cdot 1000 = 4000\pi$ dakle za $3600\pi\ cm^2$ veće.

13. Pravokutni trokut, komu su katete $a = 3\ cm$, $b = 4\ cm$, rotira oko hipotenuze. Koliko je oplošje i obujam rotacionog tijela?

Kako je površina tog trokuta $\frac{3\cdot 4}{2} = \frac{5\cdot x}{2}$, gdje je x visina pripadna hipotenuzi, to je $x = \frac{12}{5}$, zato je oplošje rotacionog tijela

$$O = \frac{12}{5}\pi(3 + 4) = \frac{84}{5}\pi;$$ obujam je tijela

$$V = \frac{x^2\pi}{3}c = \pi\frac{144}{25\cdot 3}\cdot 5 = \pi\frac{144}{15} = \pi\frac{48}{5} =$$
$$= 9{,}6\pi = 30{,}144\ cm^3.$$

14. Iz šuplje kugle iz metala, kojoj je izvanji promjer 18 *cm*, a debljina stijene 2 *cm*, treba izliti masivnu kuglu; koliki je njezin promjer?

Obujam je šuplje kugle $\frac{4}{3}(9^3 - 7^3)\pi = \frac{4}{3} \cdot 386\pi$; ako masivna kugla ima polumjer x, to je $\frac{4}{3}x^3\pi = \frac{4}{3}386\pi$ t. j. $x^3 = 386$, $x = \sqrt[3]{386} = 7{,}2811, \ldots$ *cm*, a promjer 14,5622 .... *cm*.

Vježbe u rješavanju zadataka iz fizike za učenike 4.—6. razr. gimn.

1. Jedna kugla dazimetra ima volumen 465 cm^3, druga 72 cm^3. Objesišta dviju kugala su jednako udaljena od osi poluge; kugle sebi drže ravnotežu u zraku. Kolikim utegom moramo opteretiti jednu od kugala, da bi ravnoteža postojala i u vakuumu (težina litre zraka neka je 1,290 $g^\star$)?

Rješenja: Uzgon U_1 na veliku kuglu u zraku jest:

$$U_1 = 0{,}465 \cdot 1{,}290\ g^\star = 0{,}5998\ g^\star,$$

a na malu kuglu bit će uzgon U_2:

$$U_2 = 0{,}072 \cdot 1{,}290\ g^\star = 0{,}0929\ g^\star.$$

Razlika tih uzgona je:

$$P = U_1 - U_2 = 0{,}5998 - 0{,}0929 = 0{,}5069 \doteq 0{,}507\ g^\star$$

$$\underline{P = 0{,}507\ g^\star.}$$

Prema tome, malu kuglu trebat će u vakuumu opteretiti sa $P = 0{,}507\ g^\star$ da bi ravnoteža ostala sačuvana.

2. Balon ima volumen 7,5 *l*, a težina samog balona, t. j. tvari iz koje je načinjen iznosi 5,2 $g^\star$. Kolika je sila uspinjanja, kad je balon napunjen 1) vodikom; 2) rasvjetnim plinom? Težina litre zraka neka je 1,293 $g^\star$, litre vodika $1{,}293 \cdot 0{,}0695\ g^\star$, a litre rasvjetnog plina $1{,}293 \cdot 0{,}400\ g^\star$.

Rješenje: 1) Težina vodika u balonu bit će:

$$T_v = 7{,}5 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}0695 = 0{,}67\ g^\star,$$

a težina balona napunjenog s tim vodikom:

$$T_1 = 5{,}2 + 0{,}67 = 5{,}87\ g^\star.$$

Uzgon zraka na balon je

$$U = 7{,}5 \cdot 1{,}293 = 9{,}70\ g^\star.$$

Prema tome je sila uspinjanja P_1, koja potiskuje balon u vis:

$$P_0 = U - T_1 = 9{,}70 - 5{,}87\ g^\star$$

$$\underline{P_1 = 3{,}83\ g^\star.}$$

2) Težina rasvjetnog plina u balonu je

$$T_p = 7{,}5 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}40 = 3{,}88\ g^\star.$$

Ukupna težina balona napunjenog s rasvjetnim plinom:

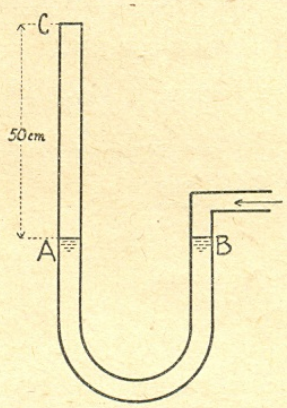
$$T_2 = 5{,}2 + 3{,}88 = 9{,}08\ g^\star$$

a sila je uspinjanja P_2:

$$P_2 = U - T_2 = 9{,}70 - 9{,}08\ g^\star$$

$$\underline{P_2 = 0{,}62\ g^\star.}$$

3. Zatvoreni manometar sa živom, vertikalno postavljen (vidi sliku), sadrži u kraku



$AC = 50$ *cm* zrak pod normalnim tlakom od 760 *mm Hg*. Ako je i vanjski tlak 760 *mm Hg*, živa stoji u oba kraka jednako visoko, t. j. razine žive u A i B leže u istoj horizontalnoj ravnini. Koliki će vanjski tlak pokazivati manometar, ako se živa podigne za 10 *cm* = = 100 *mm* u zatvorenom kraku, a isto toliko spusti u drugom kraku manometra?

Rješenje: Razlika razina žive u oba kraka manometra je 200 *mm*. Zatvoreni zrak u manometru ima sad visinu samo još 400 *mm*. Prema tome je tlak p_u zraka zatvorenog u kraku manometra (po Boyle-Mariotteovu zakonu):

$$p_u \cdot 400 = 760 \cdot 500$$

$$p_u = 950\ mm\ Hg,$$

dok je vanjski tlak p_v veći za 200 *mm*, jer drži ne samo zrak u zatvorenoj cijevi pod tlakom od 950 *mm Hg*, nego povrh toga i stupac žive od 200 *mm* u zatvorenom kraku manometra. Dakle je

$$p_v = 950 + 200\ mm\ Hg$$

$$\underline{p_v = 1150\ mm\ Hg.}$$

4. Za koliko se centimetara promijeni visina željeznog Eiffelovog tornja u Parizu pri promjeni temperature od $-10°C$ na $+30°C$? Visina tornja je 300 *m*; linearni koeficijent rastezanja željeza je 0,000 012.

Rješenje:

$$\Delta l = 300 \cdot 0{,}000\,012 \cdot 40\ m$$

$$\Delta l = 14{,}4\ cm.$$

Eiffelovu tornju, u danom slučaju, poveća se visina za 14,4 *cm*.

5. Srebrna žica, dugačka $l_0 = 20\ cm$, razapeta je između dviju čvrstih točaka A i B, koje leže u istoj horizontali. U sredini žice C obješen je uteg P zato, da bi se točka C spuštala pri rastezanju žice. Ako žicom protječe električna struja, koja žicu zagrije za 150°, pita se: 1) produženje žice Δl; 2) za koliko se *mm* spusti točka C (do točke D)? Linearni koeficijent rastezanja srebra neka je:

$$\beta = 0{,}000\,019\,4.$$

Rješenje: 1) Produljenje žice Δl bit će

$$\Delta l = 200 \cdot 0{,}000\,019\,4 \cdot 150\ mm$$
$$\underline{\Delta l = 0{,}582\ mm.}$$

2) Točka C spustila se do točke D. Imamo (nacrtaj sliku!):

$$AC = \frac{l_0}{2} \qquad AD = \frac{l_0}{2}(1 + \beta \cdot 150)$$

$$\overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AC}^2$$

$$\overline{CD}^2 = \frac{l_0^2}{4}(1 + 300\,\beta + 150^2\beta^2 - 1).$$

Kako je $150^2\beta^2$ vrlo malena veličina prema ostalim veličinama, možemo je zanemariti, pa izlazi

$$\overline{CD}^2 \doteq \frac{l_0^2}{4} \cdot 300\,\beta$$

$$\underline{\overline{CD} \doteq 7{,}63\ mm.}$$

Odatle razabiramo, da je spuštanje središta žice C mnogo uočljivije, negoli produženje žice.

6. Čovjek, težak 65 *kg**, stoji uspravno na snijegu. Površina svakog njegovog stopala (cipele) iznosi 2 dm^2. 1) Koliki tlak vrši on na svaki cm^2 u snijegu. (Pretpostavljamo, da su obje noge jednako opterećene). 2) Koliki će biti tlak na cm^2, ako taj čovjek stane na skije, od kojih svaka ima površinu 16 dm^2.

Rješenje: 1) Ukupna površina na koju čovjek tlači ima 400 cm^2. Prema tome je tlak p_1 na cm^2:

$$p_1 = \frac{65000}{400}\ g^*/cm^2$$
$$\underline{p_1 = 162{,}5\ g^*/cm^2.}$$

2) Ako stoji na skijama, bit će:

$$p_2 = \frac{65000}{3200}\ g^*/cm^2$$
$$\underline{p_2 = 20{,}3\ g^*/cm^2.}$$

Nagrađeni rješavatelji zadataka

Redakcija Mat. fiz. lista nagradila je zbog marljivog i uspješnog rješavanja zadataka a) iz matematike knjigom Sevdić, Matematička čitanka ove učenike:

1. **Boševski Tome,** 8b kl. g., »J. B. Tito«, Bitola. 2. **Čanji Ema,** 6a r. mađ.g. Sombor. 3. **Čepulić Vladimir,** 6c r. kl. g. Zagreb. 4. **Đenadić Dragoljub,** 6c r. g Prokuplje. 5. **Golubović Vladimir,** 7a r. g. Leskovac. 6. **Ilišković Aleksandar,** 8b r. g. Doboj. 7. **Janežič Jana,** 7 r. 1 g. Ljubljana. 8. **Jovančević Dobrosav,** 8 r. g. Trstenik. 9. **Kovačić Zdenka,** 8 r. g. Slav. Požega. 10. **Kronfeld Branko,** 8c r. 4. g. Zagreb. 11. **Mitrović Žarko,** 7 r. g. Vranje. 12. **Popović Slavomir,** 8 r. g. »St. Sremac« Niš. 13. **Stanković Miroslav,** 6 r. g. Prokuplje. 14. **Stojanovski Petar,** 8 kl. g. »J. B. Tito«, Bitola. 15. **Ikonomova Elisaveta,** 7 r. g. »J. B. Tito«, Bitola. 16. **Milanov Aleksandar,** 8b kl. g. Bosilegrad.

b) iz fizike po 2 knjige od ovih knjiga: Mlađenović M. Nuklearni reaktori; Ruso P.: Od atoma do zvijezda; Milanković M.: Nauka i tehnika tokom vekova ove učenike:

1. **Boševski Tome,** 8b r. g. »J. B. Tito«, Bitola. 2. **Čepulić Vladimir,** 6c r. kl. g. Zagreb. 3. **Gros Mladen,** 5a r. kl. g. Ljubljana. 4. **Jovančević Dobrosav,** 8. r. g. Trstenik. 5. **Kosec Vladislav,** 8. r. 12. g. Ljubljana. 6. **Lojen Miroslav,** 5b r. g. Varaždin. 7. **Stojanovski Petar,** 8 r. g. »J. B. Tito« Bitola. 8. **Šimunić Bruno,** 7a r. 4. g. Zagreb.

SADRŽAJ:

1. Članci

Strana

Бандић Иван: Примена Геометриских конструкција на основне аритметичке операције 3

„ Неколико занимљивих геометриских задатака из историје математике 48

Blanuša Danilo: O neeuklidskim geometrijama 5, 51, 89

Devidé Vladimir: O jednoj mogućnosti pogrešnog zaključivanja 99

Хоџић Садик: Графичко одређивање корена једначине другог степена . . . 58

Karalić Ignjat: Nešto o izvođenju Heronovog obrasca 130

Kurelec Alfred: Nikola Tesla (povodom stogodišnjice rođenja) 129

Марковић Сава: Графичко решавање квадратне једначине са коњуговано-комплексним кореним 10

Mitrinović D. S.: Kako prići matematici 41

Петровић Владимир: Тежиште троугла 133

Polya Georg: Indukcija i potpuna indukcija 59

Prvanović Stanko: Jedna teorema Eulera i jedna njena primena 103

Rajčić Lav: O tangencijalnom četverokutu s pripisanom kružnicom . . . 87

Rauter Aleksander: Jurij Vega 81

Srdoč Dušan: Geiger Muellerov brojač 84

Stojsavljević Vojislav: Jedna teorema o pravouglim sličnim trouglovima i njena primena 135

Šindler Gustav: Fizika u novoj Jugoslaviji 1

„ O atomskoj jezgri 95

Trifunović Dragan: Paradoks Mihaila Petrovića 55

„ Gde je greška 139

Ugrin Šparac Dimitrije: O nekim svojstvima čunosjeka 13

Varićak Milena: Sisaljke za dobivanje visokog vakuuma 44

Winterhalter Dragica: Fotografija u nuklearnoj fizici 93

2. Iz moje radionice i laboratorija

Mayer Dragutin: Mjerenje valne duljine svjetlosti s pomoću mjerke . . . 18

„ Jednostavno mjerenje vremena reakcije 143

Redi Oskar: Kako ćemo na jednostavan način prikazati postanak stojećih talasa 62

„ Talasna mašina za progresivne i stojeće talase 141

3. Zanimljivosti i razno

Kako su Egipćani predočivali razlomke, 22. — Einstein u emigraciji, 23. — Odakle dojam plastičnosti na širokom kinoplatnu, 24. — Matematičke anegdote, 63. — Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina, 64. — Neki interesantni rezultati, 65. — Gdje je pogreška — $2 \cdot 2 = 8$?, 65. — Proba pomoću 9, 105. — Iz života velikih ljudi, 106. — O jednoj približnoj konstrukciji pravilnih poligona, 107. — O jednoj teoremi matematičkih sredina, 108. — Pripombe k notici S. Prvanovića o aritmetičkoj, geometrijskoj in harmoničnoj sredini, 109. — Antiproton, 110. — Čerenkovljevo zračenje i njegova primjena, 112. — Tlak senjske bure, 115. — Zanimljiv zadatak iz elektriciteta, 144. — Moć korekture brojeva, 145. — Zanimljivi kvadrati, 145. — Še nekaj o grafičnem reševanju kvadratne enačbe z konjugirano-kompleksnimi koreni, 145. — Osobenosti nekih brojeva, 146. — Za naše najmlađe, 147.

4. Takmičenja učenika u matematici

Takmičenje učenika u NR Makedoniji 20

5. Zadaci i rješenja

A. Zadaci iz matematike: zad. 167. do 179., str. 26; — zad. 180. do 191., str. 65; — zad. 192. do 203., str. 115; — zad. 204. do 215., str. 147.

B. Zadaci iz fizike: zad. 101. do 105., str. 26; — zad. 106. do 110., str. 66; — zad. 111. do 115., str. 116; — zad. 116. do 120., str. 148.

C. Rješenje zadataka iz matematike: zad. 156. do 166., str. 27; — zad. 167. do 179., str. 67; — zad. 180. do 191., str. 117; — zad. 192. do 203., str. 148.

D. Rješenje zadataka iz fizike: zad. 90., 95. do 100., str. 31; — zad. 101. do 105., str. 71; — zad. 106. do 110., str. 122; — zad. 111. do 115. str. 153.

6. Vježbe iz matematike za uč. 4.—8. raz. gim. i sličnih škola

Str. 35., 74., 125., 155.

7. Vježbe za niži tečajni ispit, odnosno za 4. r. g. ili 8. r. osm. škole

Str. 37., 77., 127., 157.

8. Vježbe u rješavanju zadataka iz fizike

Str. 39., 79., 159.

9. Križaljke

Ukrštene formule, str. 128.; rešenje: 3. str. omota 4. broja.

Matematička križaljka, 3. str. omota 3. broja; rješenje: 3. str. omota 4. broja.

10. Nagrađeni rješavatelji zadataka

Str. 160.